数列・関数列の

無限級数

基礎からフーリエ級数・漸近級数まで

柴田正和 著

森北出版株式会社

はじめに

基礎から順々に建物をつくりあげてゆくように，数学は段階を追い足場を確かめつつ知見を深めてゆく学問であり，その途中があやふやであれば，それ以降の主題の理解はおぼつかない．しかし，その道筋は唯一不動の一本道ではない．実際，今日日本の中学・高校教育でとられている順序は，特に理系の生徒にとって最良のものとはかけはなれている．たとえば，連続して学ぶべきである三角関数は数Ⅰと数Ⅱに，数列とその極限は数Bと数Ⅲに，微積分は数Ⅱと数Ⅲに分割されている．はなはだしきは，関数の極限として定義される微分(数Ⅱ)という方法が，関数の極限(数Ⅲ)を学ぶ前に出現することである．どこかの一地方でこのような順序で数学を学ぶ実験をするのならまだしも，この方法に則り検定教科書を作成し全国で一様な高校教育を実施している，ということは全世界から奇異の目で見られているはずである．

基礎から順に知見を積み上げてゆく数学であるが，ある段階まで進んだあとに振り返ってみると，先に学んだことがずっと明瞭かつ簡潔に解決・理解できることに気づくことが多い．たとえば，世界中で我が国の中学受験生のみが苦労して習得する，鶴亀算をはじめとする多様な特殊技法の必要な和算系のさまざまな問題は，中学代数で学ぶ連立1次方程式によればすべて簡潔かつ統一的に解くことができる．中学で学ぶユークリッド幾何学の問題には特殊な補助線に想到することなしには解き難いものがあるが，これらは後に学習するデカルト座標を用いた解析幾何学ないしベクトルを用いると，ごく一般的な方法で容易に解くことができる．三角形の三垂線が一点(垂心)で交わることの証明がその好例である．数Ⅲでいろいろな技法を駆使して求めた関数の極限のうち多くは，コーシーの定理(1-8節)ないしテイラーの定理(1-9節)を用いるとずっと簡単に求めることができる．また，加法定理をはじめとする三角関数の諸公式のほとんどは，オイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ から簡単に導かれる．これらの例からも明らかなように，数学の学習においてはその段階ごとに，すでに学んだ主題を見直すことが理解を深化する手助けとなる．

数列・関数列の無限級数は，大学以降で履修する微分方程式論・複素関数論，さらにはフーリエ解析・漸近解析などで重要な役割を果たす．我が国では高校数学において，数列と級数の初歩を学んだ後に微分積分を履修するが，この微分積分の成果を反

映した，数列・関数列の本格的な無限級数理論の教育が系統的に施されていない感がある．たとえば，アメリカで "by the ratio test, …（比試験で…）．" と話しかけるとほとんどの理工系学生はうなずくのに，日本の学生は「えっ，何のこと？」という反応を見せることが多いのが印象的である．

本書では，高校および一部大学初年級の微積分・解析学の履修を基礎にした，数列・関数列の無限級数論を展開し，その重要な応用としてフーリエ級数および漸近級数を採り上げる．カントール(Cantor, 1845-1918)が無限同士，たとえば自然数全体と偶数全体の「個数」を比較するという快挙を成し遂げたとき，彼の師であり数学界の大御所であったクロネッカーを含む当時の数学者たちがそれを理解できないばかりか，カントールを排斥したという事跡があるほど，「無限」は人間の一般常識とかなりかけ離れた性質を見せる．その例にもれず，無限級数もその順序を変更すると，あるいはカッコを削除すると総和が変化する，などの特異な性質をもつ．下の表は，どのような条件下でこれらの「常識的」演算が可能であるかを整理したものである．

一般数列と定符号数列の比較表(各数列の級数に可能な操作)

[一般数列]	
・項別に定数倍する．	定理 2-5
・項別に加える．	定理 2-5
・項の順序を変えずにカッコを挿入する．	定理 2-6
[定符号数列]	
・項の順序を変える．	定理 3-4
・カッコを(挿入)削除する．	定理 3-3

なお，複素数列および複素関数列とその無限級数は，複素関数論との関連で論じることが適当と考え，本書では例外を除き対象を実数変数の実数列および実関数列とその無限級数に限定した．また，二重級数および無限乗積にもふれない．

一方で，各種漸近関係記号を導入し(1-11 節)，級数和および発散する級数の関数形を得るのに活用する．また，級数の収束加速法・級数和の漸近級数展開など，通常の級数論のテキストにはあまり見かけない題材も採り入れた．

読者層として，検定教科書の存在により一様な高校教育を受けてきた我が国の大学・前期学部生を念頭におくが，記述の都合上特に第 1 章で，高校数学で履修ずみの内容にふれることがある．なお，微分方程式論を未修の読者は，6-1 節を読みとばしてもかまない．

2011 年 10 月　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　著　者

目　　次

第1部

数列とその無限級数

高校教科書には「数を一列にならべたものを数列という」という記述がみられるが，この文章には「一列」が強調されている語感があり，数が曲がりくねってならべられると数列ではなくなるのか？ と考える生徒も現れかねず，数列の定義としては漠然としすぎているのではないだろうか．

数列の本質は関数である．つまり，数列 $\{a_k\}$ は変数 k の定義域を自然数に限定した k の関数である．実際，等差数列 $a_k = a_1 + (k-1)d$ は k の 1 次関数であり，等比数列 $a_k = a_1 r^{k-1}$ は k の指数関数にほかならない．数列を関数とみなすことにより，多くの概念を数列と関数とで共通に定義し理解することができる．その意味で，第 1 部で取り扱う数列は 1 変数 k の関数であり，第 2 部で取り扱う関数列は 2 変数 k (自然数) および x (実数) の関数である．また，それらの無限級数は関数の変数 k ないし x による積分との相似性が強い．

第1章

基礎事項

本章では，数列・関数列の無限級数論を展開するために必要な概念・用語の説明とその重要な結論をまとめる．なお，前述のように数列は関数の一種であるので，本章の記述は関数一般を対象とする．

関数の有界性，極限，単調性(1-1〜1-4 節)は，関数の極限を定義しまたその存在を証明するために用いる基本的概念である．また，微分・積分からテイラー展開(1-5〜1-10 節)は，実際に関数の極限を求める際に利用する有効な方法である．

後に第 7 章で詳述する漸近級数の興味あるものの多くは発散する．発散する漸近級数を記述するために便利な漸近関係記号を 1-11 節で早々と導入するのは，たとえば，収束する無限級数が発散する二つの級数の差と表現される場合，発散する級数を評価するときに漸近関係記号が有用だからである．

1-1　関数の有界性

$f(x)$ を x のある集合上で定義された関数とする．その集合(定義域)は，実数関数の場合には実数全体またはその部分集合(本書では例外を除いてふれないが，複素関数の場合には複素数全体またはその部分集合)，また数列の場合には，自然数(ときに 0 および負の整数を含む)全体またはその部分集合である．

実数 x に依存しない定数 M_1 が存在し，実関数 $f(x)$ と定義域内の任意の x に対して，

$$f(x) \leq M_1$$

が成立するとき，関数 $f(x)$ は**上に有界である**(to be bounded above)という．このとき，定数 M_1 を関数 $f(x)$ の**上界**(upper bound)という．M_1 が関数 $f(x)$ の上界ならば，M_1 より大きい任意の数も関数 $f(x)$ の上界である．

例 1-1 **上に有界な関数**

$f(x) = -e^x$　(図 1-1)　■

また，x に依存しない定数 M_2 が存在し，関数 $f(x)$ と定義域内の任意の x に対して，

$$M_2 \leq f(x)$$

が成立するとき，関数 $f(x)$ は**下に有界である**(to be bounded below)という．このとき，定数 M_2 を関数 $f(x)$ の**下界**(lower bound)という．M_2 が関数 $f(x)$ の下界ならば，M_2 より小さい任意の数も関数 $f(x)$ の下界である．

例 1-2 **下に有界な関数**

$f(x) = e^x$　(図 1-1)　■

なお，上および下に有界であるとき，単に，**有界である**(to be bounded)という．

例 1-3 **有界な関数**

$f(x) = \tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$　(図 1-1)　■

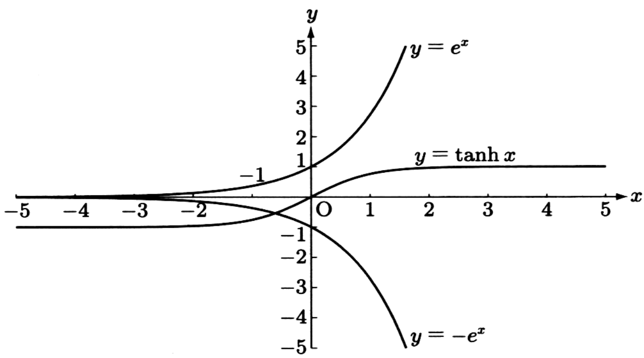


図 1-1　有界な関数

関数 $f(x)$ が上に有界であるとき，任意の x に対して

$$f(x) \leq K_1$$

である(すなわち，K_1 が関数 $f(x)$ の上界である)と同時に，任意の(任意に小さい)正の定数 ε に対して

$$K_1 - \varepsilon < f(x)$$

を満たす x が少なくとも一つ存在するとき，定数 K_1 を関数 $f(x)$ の**上限** (least upper bound，または supremum) という．したがって，上限は上界のうち最小のものである．もし，関数 $f(x)$ に最大値が存在すれば，それが上限でもある．

例 1-4　**上限が最大値である場合**

$f(x) = \sin x$ の上限は，$K_1 = 1$ であり，これは最大値でもある (図 1-2)．　■

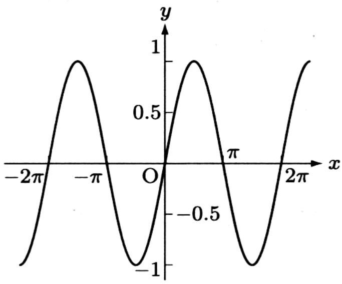


図 **1-2**　正弦関数 $y = \sin x$

例 1-5　**上限が最大値でない場合**

$f(x) = \tanh x$ の上限は $K_1 = 1$ であるが，これは最大値ではない (図 1-1)．　■

また，関数 $f(x)$ が下に有界であるとき，任意の x に対して

$$K_2 \leq f(x)$$

であると同時に，任意の正の定数 ε に対して

$$f(x) < K_2 + \varepsilon$$

を満たす x が少なくとも一つ存在するとき，定数 K_2 を関数 $f(x)$ の**下限** (greatest lower bound，または infimum) という．したがって，下限は下界のうち最大のものである．もし，関数 $f(x)$ に最小値が存在すれば，それが下限でもある．

例 1-6　**下限が最小値である場合**

$f(x) = \sin x$ の下限は $K_2 = -1$ であり，これは最小値でもある (図 1-2)．　■

例 1-7　**下限が最小値でない場合**

$f(x) = \tanh x$ の下限は $K_2 = -1$ であるが，これは最小値ではない (図 1-1)．　■

1-2　関数の極限と連続性

「変数 x が a に近づくときの関数 $f(x)$ の極限は α である」ことを厳密に表現すると，「a の十分近く（a そのものは除く）に変数 x の値をとれば，関数 $f(x)$ の値と α の差をいくらでも小さくすることができる」となる．これをやや形式的に記述したものがコーシー（Cauchy, 1789-1857）による ε-δ 式の極限の定義である．

すなわち，任意の $\varepsilon > 0$ が与えられたとき，$|x-a| < \delta(\varepsilon)$ を満足する a 以外のすべての x の値に対して $|f(x)-\alpha| < \varepsilon$ が成立するような $\delta(\varepsilon)$ を定めることができるとき，「x が a に近づくときの関数 $f(x)$ の極限は α である」といい，これを

$$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$$

または，

$$f(x) \to \alpha, \qquad x \to a$$

と書く．

数学的（論理的）に「任意の ε」と突き放した表現になっているが，実際には「いくらでも小さな」という意味である．ε-δ 式の極限の定義に親しみをもてない読者は，「a の左右両側に適当な幅 δ をとり，その内部に変数 x の値があれば $(a-\delta < x < a+\delta, x \neq a)$，どんなに小さな値 ε をもってきても，関数 $f(x)$ と α との誤差を ε 以下にすることができる $(\alpha-\varepsilon < f(x) < \alpha+\varepsilon)$ ように $\delta(\varepsilon)$ を定めることができる」と読み替えればよい．なお，この定義によれば，「右からの極限 $\lim_{x\to a+0} f(x)$」と「左からの極限 $\lim_{x\to a-0} f(x)$」を統一的に扱っているので，極限が存在するためには自動的に両者が等しくなければならないことがわかる．

例 1-8　**0 に収束する関数と有界振動する関数の積**

$\lim_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = 0$ である（図 1-3）．なぜならば，

$$|f(x)-\alpha| = \left|x\sin\frac{1}{x}\right| \leq |x| < \varepsilon, \qquad \alpha = 0$$

を満足するためには，

$$|x-a| = |x| < \delta(\varepsilon) = \varepsilon, \qquad a = 0$$

であればよい，すなわち，ε の関数として $\delta(\varepsilon)$ を具体的に $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ と確定できるからである．■

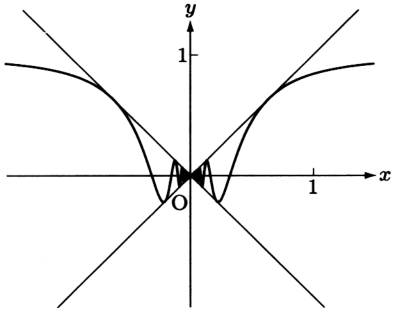


図 1-3　$y = x \sin \dfrac{1}{x}$

例 1-9　0 に収束する二つの関数の比

$\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ である．なぜならば，後述の式 (1-10-1) を用いると

$$|f(x) - \alpha| = \left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| \le \left|\frac{(x - x^3/6 + x^5/120) - x}{x}\right| < \left|\frac{x^2}{6}\right| < \varepsilon, \qquad \alpha = 1$$

となり，これを満足するためには，

$$|x - a| = |x| < \delta(\varepsilon) = \sqrt{6\varepsilon}, \qquad a = 0$$

であればよい，すなわち $\delta(\varepsilon) = \sqrt{6\varepsilon}$ を確定できるからである．■

同様に「変数 x が限りなく大きくなるときの関数 $f(x)$ の極限は α である」ことを厳密に表現すると，「変数 x の値を十分大きくとれば，関数 $f(x)$ の値と α の差をいくらでも小さくすることができる」となる．

数学的に記述すると，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$X(\varepsilon) < x$ を満足するすべての x の値に対して $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ が成立するような $X(\varepsilon)$ を定めることができるとき，「x が無限に大きくなるときの(あるいは，$+\infty$ に近づくときの)関数 $f(x)$ の極限は α である」といい，これを

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \alpha$$

または，

$$f(x) \to \alpha, \qquad x \to +\infty$$

と書く[†1]．

†1　本書では実数の無限大の極限を $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, $x \to \pm\infty$ などと表記し，複素平面の無限遠点を $x = \infty$ と表記する．ただし，数列における整数 n の場合のように正の実数であることが明らかな場合には，$\lim_{n\to\infty}$ と書くこともある．

逆に「変数 x が限りなく小さくなるときの関数 $f(x)$ の極限は α である」ことを厳密に表現すると，「変数 x の値を十分小さくとれば，関数 $f(x)$ の値と α の差をいくらでも小さくすることができる」となる．数学的に記述すると，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$x < X(\varepsilon)$ を満足するすべての x の値に対して $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ が成立するような $X(\varepsilon)$ を定めることができるとき，「x が無限に小さくなるときの(あるいは，$-\infty$ に近づくときの)関数 $f(x)$ の極限は α である」といい，これを

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \alpha$$

または，

$$f(x) \to \alpha, \qquad x \to -\infty$$

と書く．

次の定理 1-1 および 1-2 は高校で履修済みであるが，ここでは厳密な証明を付しておく．

定理 1-1　関数の実数倍，和，積および商の極限

$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$，$\lim_{x \to a} g(x) = \beta$ ならば，

(1)　$\lim_{x \to a} cf(x) = c\alpha$　　(a は $\pm\infty$ を含む，c：定数)

(2)　$\lim_{x \to a}(f(x) + g(x)) = \alpha + \beta$

(3)　$\lim_{x \to a}(f(x)g(x)) = \alpha\beta$

(4)　$\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\alpha}{\beta}$　　$(\beta \neq 0)$

証明)　(1)　$c = 0$ のときには明らかに成立する．ゆえに以下では $c \neq 0$ とする．

$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$ であるから，$|x - a| < \delta(\varepsilon/|c|)$ を満足する a 以外のすべての x の値に対して $|f(x) - \alpha| < \varepsilon/|c|$ が成立するように $\delta(\varepsilon/|c|)$ を定めることができる．そこで，$|x - a| < \delta(\varepsilon/|c|)$ の範囲にある x を選ぶと，$|cf(x) - c\alpha| < \varepsilon$ となる．すなわち，$|x - a| < \delta(\varepsilon/|c|)$ を満足する a 以外のすべての x の値に対して $|cf(x) - c\alpha| < \varepsilon$ が成立する．

したがって，定義により

$$\lim_{x \to a} cf(x) = c\alpha$$

である．

(2)　$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$ であるから，$|x - a| < \delta_1(\varepsilon/2)$ を満足する a 以外のすべての x の値に対して $|f(x) - \alpha| < \varepsilon/2$ が成立するように $\delta_1(\varepsilon/2)$ を定めることができる．

同じく，$\lim_{x \to a} g(x) = \beta$ であるから定義により $|x - a| < \delta_2(\varepsilon/2)$ を満足する a 以外のすべての x の値に対して $|g(x) - \beta| < \varepsilon/2$ が成立するように $\delta_2(\varepsilon/2)$ を定めることができる．

そこで，$\delta_1(\varepsilon/2)$ と $\delta_2(\varepsilon/2)$ のうち小さいほうを δ とし，$|x-a|<\delta$ の範囲にある x を選ぶと，

$$|(f(x)+g(x))-(\alpha+\beta)| \le |f(x)-\alpha|+|g(x)-\beta| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

となる．すなわち，$|x-a|<\delta$ を満足する a 以外のすべての x の値に対して $|(f(x)+g(x))-(\alpha+\beta)|<\varepsilon$ が成立する．したがって，定義により

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=\alpha+\beta$$

である．なお，(1)，(2) を組み合わせると，

$$\lim_{x\to a}(c_1 f(x)+c_2 g(x))=c_1\alpha+c_2\beta$$

が成り立つ．

(3)　$\alpha\beta=0$ のときには明らかに成立する．ゆえに以下では $\alpha\beta\neq 0$ とする．

$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$ であるから，$|x-a|<\delta_1\left(\dfrac{\varepsilon}{2|\alpha|+|\beta|}\right)$ を[†2]満足する a 以外のすべての x の値に対して $|f(x)-\alpha|<\dfrac{\varepsilon}{2|\alpha|+|\beta|}$ が成立するように $\delta_1\left(\dfrac{\varepsilon}{2|\alpha|+|\beta|}\right)$ を定めることができる．同じく $\lim_{x\to a} g(x)=\beta$ であるから，$|x-a|<\delta_2\left(\dfrac{\varepsilon}{2|\alpha|+|\beta|}\right)$ を満足する a 以外のすべての x の値に対して $|g(x)-\beta|<\dfrac{\varepsilon}{2|\alpha|+|\beta|}$ が成立するように，$\delta_2\left(\dfrac{\varepsilon}{2|\alpha|+|\beta|}\right)$ を定めることができる．

そこで，$\delta_1\left(\dfrac{\varepsilon}{2|\alpha|+|\beta|}\right)$ と $\delta_2\left(\dfrac{\varepsilon}{2|\alpha|+|\beta|}\right)$ のうち小さいほうを δ とし，$|x-a|<\delta$ の範囲にある x を選び，$\varepsilon<(2|\alpha|+|\beta|)|\alpha|$ を満たすべく ε が十分小さければ，

$$\begin{aligned}|f(x)g(x)-\alpha\beta| &= |f(x)(g(x)-\beta)+\beta(f(x)-\alpha)| \le |f(x)(g(x)-\beta)|+|\beta(f(x)-\alpha)|\\ &\le |f(x)|\,|g(x)-\beta|+|\beta|\,|f(x)-\alpha| < \left(|\alpha|+\frac{\varepsilon}{2|\alpha|+|\beta|}\right)\frac{\varepsilon}{2|\alpha|+|\beta|}+|\beta|\frac{\varepsilon}{2|\alpha|+|\beta|}\\ &< (|\alpha|+|\alpha|)\frac{\varepsilon}{2|\alpha|+|\beta|}+|\beta|\frac{\varepsilon}{2|\alpha|+|\beta|}<\varepsilon\end{aligned}$$

となる．すなわち，$|x-a|<\delta$ を満足する a 以外のすべての x の値に対して，$|f(x)g(x)-\alpha\beta|<\varepsilon$ が成立する．したがって，定義により

$$\lim_{x\to a}(f(x)g(x))=\alpha\beta$$

である．

(4)　$\alpha=0$ のときには明らかに成立する．ゆえに以下では $\alpha\neq 0$ とする．

$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$ であるから，$|x-a|<\delta_1\left(\dfrac{\varepsilon\beta^2}{2|\alpha|+4|\beta|}\right)$ を満足する a 以外のすべての x の値に対して $|f(x)-\alpha|<\dfrac{\varepsilon\beta^2}{2|\alpha|+4|\beta|}$ が成立するように，$\delta_1\left(\dfrac{\varepsilon\beta^2}{2|\alpha|+4|\beta|}\right)$ を定めることができる．同じく $\lim_{x\to a} g(x)=\beta$ であるから，$|x-a|<\delta_2\left(\dfrac{\varepsilon\beta^2}{2|\alpha|+4|\beta|}\right)$ を満足する a 以外のすべての x の値に対して

†2　不等式の右辺の表式を唐突に感じるのは無理ないことである．これは，証明の最後の式から逆算して出てきたものである．

$|g(x)-\beta| < \dfrac{\varepsilon\beta^2}{2|\alpha|+4|\beta|}$ が成立するように，$\delta_2\left(\dfrac{\varepsilon\beta^2}{2|\alpha|+4|\beta|}\right)$ を定めることができる．

そこで，$\delta_1\left(\dfrac{\varepsilon\beta^2}{2|\alpha|+4|\beta|}\right)$ と $\delta_2\left(\dfrac{\varepsilon\beta^2}{2|\alpha|+4|\beta|}\right)$ のうち小さいほうを δ とし，$|x-a|<\delta$ の範囲にある x を選び，$\varepsilon < (|\alpha|+2|\beta|)/|\beta|$ を満たすべく ε が十分小さければ，

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{\alpha}{\beta}\right| = \left|\frac{\beta f(x)-\alpha g(x)}{\beta g(x)}\right| = \left|\frac{(\beta-g(x))f(x)+(f(x)-\alpha)g(x)}{\beta g(x)}\right|$$

$$\leq \frac{\left|\dfrac{\varepsilon\beta^2}{2|\alpha|+4|\beta|}\right|\left(|\alpha|+\dfrac{\varepsilon\beta^2}{2|\alpha|+4|\beta|}\right)+\left|\dfrac{\varepsilon\beta^2}{2|\alpha|+4|\beta|}\right|\left(|\beta|+\dfrac{\varepsilon\beta^2}{2|\alpha|+4|\beta|}\right)}{|\beta|\left(|\beta|-\dfrac{\varepsilon\beta^2}{2|\alpha|+4|\beta|}\right)}$$

$$\leq \frac{\left(|\alpha|+\dfrac{|\beta|}{2}\right)+\left(|\beta|+\dfrac{|\beta|}{2}\right)}{|\beta|\left(|\beta|-\dfrac{|\beta|}{2}\right)}\left|\frac{\varepsilon\beta^2}{2|\alpha|+4|\beta|}\right| = \varepsilon$$

となる．すなわち，$|x-a|<\delta$ を満足する a 以外のすべての x の値に対して

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{\alpha}{\beta}\right| < \varepsilon$$

が成立する．したがって，定義により

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta} \qquad (\beta \neq 0)$$

である．

定理 1-2　$x=a$ の十分近く（近傍）において

$f(x) \leq g(x)$,　あるいは　$f(x) < g(x)$　ならば，

すなわち，ある正の数 δ が存在して，$|x-a|<\delta$ の区間のすべての x について

$f(x) \leq g(x)$,　あるいは　$f(x) < g(x)$　が満たされ，かつ $\lim_{x\to a} f(x)$ と $\lim_{x\to a} g(x)$ が存在するならば，

$$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$$

が成立する．

証明）　背理法による．$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$，$\lim_{x\to a} g(x)=\beta$ とおく．

もし，$\lim_{x\to a} f(x) > \lim_{x\to a} g(x)$ すなわち $\alpha>\beta$ であるならば，$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$ であるから定義により，$|x-a|<\delta_1((\alpha-\beta)/4)$ を満足する a 以外のすべての x の値に対して $|f(x)-\alpha|<(\alpha-\beta)/4$ が成立するように，$\delta_1((\alpha-\beta)/4)$ を定めることができる．

同じく $\lim_{x\to a} g(x)=\beta$ であるから，定義により，$|x-a|<\delta_2((\alpha-\beta)/4)$ を満足する a 以外のすべての x の値に対して $|g(x)-\beta|<(\alpha-\beta)/4$ が成立するように，$\delta_2((\alpha-\beta)/4)$ を定めることができる．

そこで，$\delta_1((\alpha-\beta)/4)$ と $\delta_2((\alpha-\beta)/4)$ のうち小さいほうを δ とし，$|x-a|<\delta$ の範囲にある x を選ぶと，

$$f(x)-g(x)=(f(x)-\alpha)-(g(x)-\beta)+(\alpha-\beta)$$
$$\geq -\frac{\alpha-\beta}{4}-\frac{\alpha-\beta}{4}+(\alpha-\beta)=\frac{\alpha-\beta}{2}>0$$

となる．すなわち，$|x-a|<\delta$ を満足する a 以外のすべての x の値に対して $f(x)>g(x)$ が成立する．これは前提に反する．したがって，定理は証明された．

■ [関数の連続]

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

であるとき，関数 $f(x)$ は $x=a$ で連続である，という(図 1-4)．x のある区間内のすべての点で連続であるとき，関数 $f(x)$ はその区間で連続であるという．

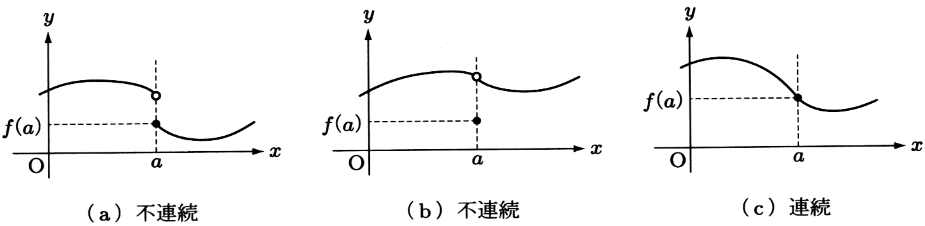


図 1-4　$x=a$ における関数の連続と不連続

例 1-10

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0)\end{cases}$$ は $x=0$ で連続である(図 1-3)．■

$x=a$ で連続な二つの関数の和，積，商は連続である．ただし，商の場合，分母が 0 となる点を除く．

1-3　関数の単調性

独立変数 x のある区間 $a\leq x\leq b$ において，x が増加するときに $f(x)$ が減少しないとき，関数 $f(x)$ は区間 $a\leq x\leq b$ において**単調増加関数**(monotonic increasing function)

である，という[†3]．

例 1-11

$f(x) = \tan x$ は区間 $(n - 1/2)\pi < x < (n + 1/2)\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ のそれぞれで単調増加である（図 1-5）．■

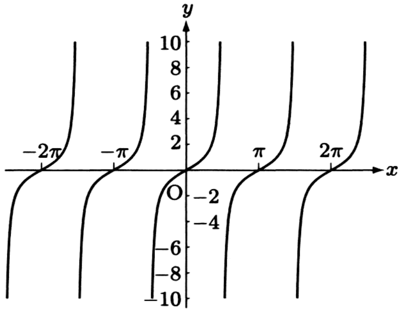


図 1-5　単調増加関数 $y = \tan x$

逆に，区間 $a \leq x \leq b$ において x が増加するときに $f(x)$ が増加しないとき，関数 $f(x)$ は区間 $a \leq x \leq b$ において**単調減少関数** (monotonic decreasing function) である，という．

例 1-12

$f(x) = e^{-x}$ は全区間 $-\infty < x < \infty$ にわたり，単調減少である（図 1-6）．■

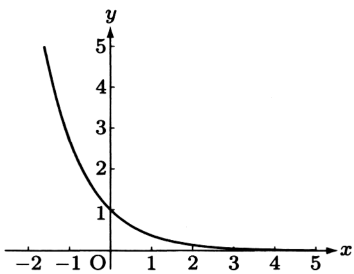


図 1-6　単調減少関数 $y = e^{-x}$

†3　これは広義の単調増加の定義である．狭義の単調増加は x が増加するときに $f(x)$ が増加することを意味する．単調増加数列の性質は，狭義から広義に拡大しても変わらないので，本書では単調性（増加・減少）という用語を一貫して広義の単調性の意味で用いる．

定理 1-3　区間 $a \leq x$ において，関数 $f(x)$ が単調増加（減少）関数であり，上に（下に）有界であるならば，$x \to \infty$ の極限で関数 $f(x)$ は収束する．

証明） 単調関数は振動しないので，$x \to \infty$ の極限で収束するか単純発散するかのどちらかである（2-2 節）．したがって，単調増加（減少）関数が，上に（下に）有界であるならば，発散できないので収束する．

1-4　関数の上極限と下極限

$x \geq x_0$ において関数 $f(x)$ が有界であるとする．$x \geq x_1 (\geq x_0)$ の範囲における関数 $f(x)$ の上限・下限を，それぞれ $K_1(x_1), K_2(x_1)$ とする．このとき，$K_1(x_1), K_2(x_1)$ は x_1 のそれぞれ単調減少・単調増加する有界な関数である．したがって，定理 1-3 によりそれらの極限が存在し，それぞれ**上極限**（upper limit）・**下極限**（lower limit）と呼び，次の記号で表す．

$$\overline{\lim} f(x) \equiv \overline{\lim_{x\to\infty}} f(x) = \lim_{x_1\to\infty} K_1(x_1)$$

$$\underline{\lim} f(x) \equiv \underline{\lim_{x\to\infty}} f(x) = \lim_{x_1\to\infty} K_2(x_1)$$

例 1-13

$$\overline{\lim} \cos^2 x = 1, \qquad \underline{\lim} \cos^2 x = 0$$ ■

上に有界な関数は有限の上極限を，下に有界な関数は有限の下極限をもつ．上極限は下極限以上である．また，上極限と下極限が一致するとき，それが極限である．

同様に，区間 $a \leq x \leq b$ において関数 $f(x)$ が有界であるとする．$(a \leq) < c - \varepsilon < x < c + \varepsilon (\leq b)$ の範囲における関数 $f(x)$ の上限・下限を，それぞれ $K_1(c, \varepsilon)$, $K_2(c, \varepsilon)$ とする．このとき，$K_1(c, \varepsilon)$, $K_2(c, \varepsilon)$ は $\varepsilon \to 0+$ のときそれぞれ単調減少・単調増加する有界な関数である．したがって，定理 1-3 によりそれらの極限が存在し，それぞれ $x \to c$ の**上極限・下極限**と呼ぶ．

$$\overline{\lim_{x\to c}} f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0+} K_1(c, \varepsilon)$$

$$\underline{\lim_{x\to c}} f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0+} K_2(c, \varepsilon)$$

例 1-14

$$\overline{\lim_{x\to 0}} \sin\frac{1}{x} = 1, \qquad \underline{\lim_{x\to 0}} \sin\frac{1}{x} = -1$$ ■

1-5　微分と積分

我が国の高校数学で履修済みの項目は，本書を読むための前提としているが，本章の説明のつながりの観点から，微分と積分の定義には簡単にふれることにする．続いて，大学レベルの内容である，無限確定の微分係数を定義し，広義積分を導入する．

1-5-1　微分

閉区間 $[a, b]$ において連続な関数 $y = f(x)$ に関して，開区間 (a, b) 内の点 c において，

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \tag{1-5-1}$$

の極限が存在する（有限確定である）とき，その極限を関数 $y = f(x)$ の点 c における微分係数（微係数）と呼び，$f'(c)$ と表記する．また，関数 $y = f(x)$ は点 c において微分可能であるという．

図 1-7 において，

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

は線分 PQ の勾配，すなわち，関数 $f(x)$ の $x = c$ から $x = c + h$ までの平均変化率であるから，極限 (1-5-1) は関数 $f(x)$ の $x = c$（点 P）における接線の勾配，すなわち，瞬間変化率である．

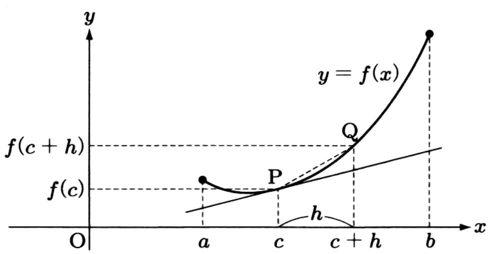


図 1-7　関数 $f(x)$ の $x = c$ における微分係数

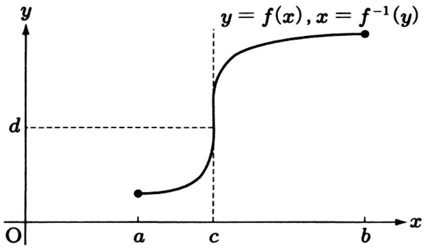
開区間 (a, b) 内のすべての点 x において関数 $y = f(x)$ が微分可能であるとき，関数 $y = f(x)$ は区間 (a, b) において微分可能であるという．このとき，点 x における微分係数 $f'(x)$ を x の関数とみることができるので，これを関数 $f(x)$ から派生した関数という意味で，関数 $f(x)$ の導関数（derivative）と呼ぶ．関数 $f(x)$ から導関数 $f'(x)$ を求める演算を「微分する」という．導関数を $y'(x)$，$\dfrac{dy}{dx}$ あるいは $\dfrac{df(x)}{dx}$ と表すこともある．

さらに，開区間 (a,b) で導関数 $f'(x)$ が微分可能であるとき，$f'(x)$ の導関数を関数 $f(x)$ の２階導関数（2nd-order derivative）と呼び，$f''(x)$ と表記する．3 階以上の導関数も同様に定義する．

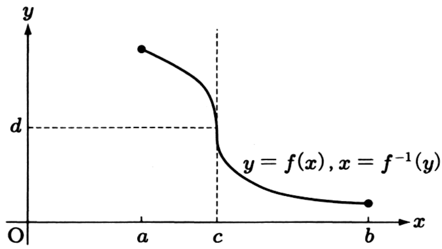
開区間 (a,b) 内の点 c において，有限確定の関数 $y=f(x)$ の極限 (1-5-1) が存在しない場合であっても，その逆関数の極限が 0 で確定の場合（図 1-8），すなわち，

$$\left.\frac{dx}{dy}\right]_{x=c} = \lim_{h\to 0}\frac{f^{-1}(d+h)-f^{-1}(d)}{h} = 0, \qquad d=f(c)$$

であるとき，関数 $y=f(x)$ は $x=c$ で確定した無限大の微係数をもつ，あるいは，無限大の確定勾配をもつ，という．このうち，図 1-8 (a) は $+\infty$ の確定勾配であり，図 1-8 (b) は $-\infty$ の確定勾配である．



（a）$x=c$ で $+\infty$ の確定勾配をもつ関数 $y=f(x)$



（b）$x=c$ で $-\infty$ の確定勾配をもつ関数 $y=f(x)$

図 1-8　$x=c$ で $\pm\infty$ の確定勾配をもつ関数 $y=f(x)$

■ 1-5-2　積分

閉区間 $[a,b]$ において定義された関数 $y=f(x)$ があるとき，微分すると $f(x)$ になる関数 $F(x)$ を関数 $f(x)$ の原始関数と呼ぶ．

$$F'(x)=f(x)$$

$F(x)$ が関数 $f(x)$ の原始関数であるならば，$F(x)+C$ (C：定数) も関数 $f(x)$ の原始関数であり，これ以外に原始関数は存在しない．関数 $f(x)$ の原始関数全体の集合を関数 $f(x)$ の不定積分と呼び，本書では

$$\int^x f(t)dt$$

と表記する．

さらに，閉区間 $[a,b]$ 内の２点 c，d における原始関数の差（どの原始関数を用いて

も差は同一である）

$$F(d)-F(c)$$

を，関数 $f(x)$ の点 c から d までの定積分と呼び，

$$\int_c^d f(t)dt$$

と表記する．このとき，点 c および d を定積分 $\int_c^d f(t)dt$ のそれぞれ下限および上限と呼ぶ．

区間 $c<x<d$ において関数 $f(x)$ が正の値をとるならば，定積分 $\int_c^d f(t)dt$ は曲線 $y=f(x)$，x 軸，および y 軸に平行な 2 直線 $x=c$，$x=d$ で囲まれる図形の面積 S を表す（図 1-9）．

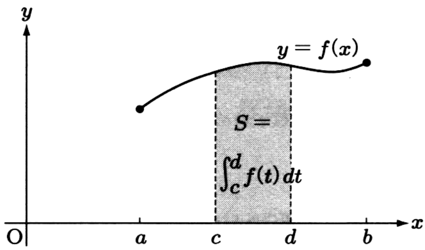


図 1-9　関数 $y=f(x)$ の定積分

■ 1-5-3　広義積分

有限区間 $[a,b]$ において，端点も含み有限の値をとる関数の積分を定義したが，本項でこれを拡張する．

■ [積分区間が有限でない場合]

有限区間 $[a,b]$ における積分の上限または（および）下限を $+\infty$ $(-\infty)$ にした極限値が存在するとき，これを無限区間の積分と定義する．

例 1-15

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx=\lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{1}{x^\alpha}dx=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{1-\alpha}(R^{1-\alpha}-1)=\frac{1}{\alpha-1}\qquad(\alpha>1)$$ ■

■ [積分区間の端で被積分関数が発散する場合]

有限区間 $[a,b]$ における積分の上限または(および)下限において，関数の値が発散するが，積分区間を $[a+\varepsilon,b]$（または $[a,b-\varepsilon]$）とした積分の $\varepsilon\to 0+$ の極限値が存在するとき，これを区間 $[a,b]$ の積分と定義する．

例 1-16 †4

$$\int_0^1 \log x\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^1 \log x\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0+}[x(\log x-1)]_\varepsilon^1$$

$$=-1-\lim_{\varepsilon\to 0+}\varepsilon(\log\varepsilon-1)=-1-\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{\log\varepsilon-1}{1/\varepsilon}=-1-\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1/\varepsilon}{-1/\varepsilon^2}=-1$$

（後述の定理 1-7 を用いた）■

例 1-17

$$\int_0^{\pi/2}\log(\sin x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^{\pi/2}\log(\sin x)\,dx=-\frac{\pi}{2}\log 2$$

証明）$I=\int_0^{\pi/2}\log(\sin x)\,dx=\int_0^{\pi/2}\log(\cos x)\,dx$

ゆえに，

$$2I=\int_0^{\pi/2}\log(\sin x)\,dx+\int_0^{\pi/2}\log(\cos x)\,dx=\int_0^{\pi/2}\log\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)dx$$

$$I=-\frac{\pi}{4}\log 2+\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\log(\sin 2x)\,dx=-\frac{\pi}{4}\log 2+\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\log(\sin t)\,dt,\qquad (2x=t)$$

$$=-\frac{\pi}{4}\log 2+\frac{1}{2}I$$

ゆえに

$$I=\int_0^{\pi/2}\log(\sin x)\,dx=-\frac{\pi}{2}\log 2$$

■

以下の 1-6～1-9 節で，微分可能な関数に成立する重要な定理を紹介する．ライプニッツにより微積分学が創始されたのが 1675 年であるから，定理に名を冠せられた数学者の生没年から，初期の微積分学が，情報伝達の不自由な時代にもかかわらずめざましい速さで発展したことがわかる．

†4　本書においては，対数関数 $\log x$ はすべて自然対数 $\log_e x$ を意味する．

1-6　ロールの定理

定理 1-4　ロール(Rolle, 1652-1719)の定理　関数 $f(x)$ が区間 $[a,b]$ で連続，かつ区間 (a,b) のすべての点で確定した(有限または無限)微分係数をもち，$f(a)=f(b)$ であるならば，区間 (a,b) の少なくとも 1 点 c において，$f'(c)=0,\ a<c<b$ が成立する．

証明)　$f(a)=f(b)=\alpha$ とおく．まず，区間 $[a,b]$ において $f(x)\equiv\alpha$ ならば，区間 (a,b) の任意の点 c において $f'(c)=0$ である．次に，区間 (a,b) のある点 d において $f(d)>\alpha$ $(f(d)<\alpha)$ であるならば，閉区間 $[a,b]$ で連続な関数は区間 (a,b) の 1 点 c において最大値(最小値)をとる．$f(x)$ は区間 (a,b) のすべての点で確定した微分係数をもつので，極大点(極小点) c において $f'(c)=0$ である．

例 1-18

図 1-10 の関数 $f(x)$ は区間 $[a,b]$ で連続であり，区間 (a,b) のすべての点で確定した有限の微分係数をもち，$f(a)=f(b)$ である．区間 (a,b) の 1 点 c において $f'(c)=0$ である．■

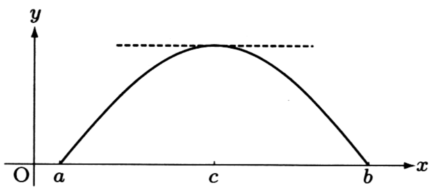


図 1-10　すべての点で有限確定の微分係数をもつ関数 (1)

例 1-19

図 1-11 の関数 $f(x)$ は区間 $[a,b]$ で連続であり，区間 (a,b) のすべての点で確定した有限の微分係数をもち，$f(a)=f(b)$ である．区間 (a,b) の 2 点 c_1,c_2 において，$f'(c_1)=f'(c_2)=0$ である．■

例 1-20　**$-\infty$ の確定勾配**

図 1-12 の関数 $f(x)$ は区間 $[a,b]$ で連続であり，区間 (a,b) 内の点 d で確定した $-\infty$ の微分係数，その他のすべての点で確定した有限の微分係数をもち，$f(a)=f(b)$ である．区間 (a,b) の 1 点 c において，$f'(c)=0$ である．■

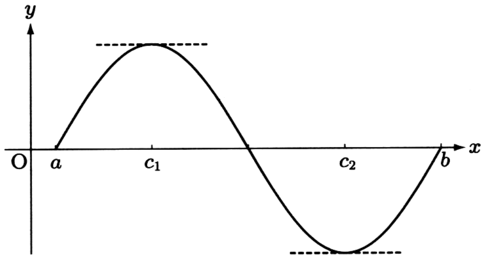


図 1-11　すべての点で有限確定の微分係数をもつ関数 (2)

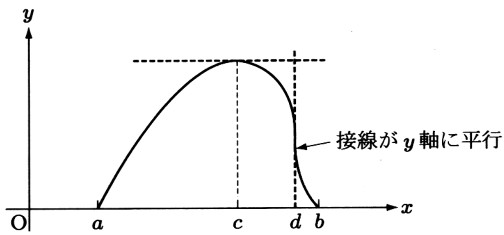


図 1-12　$x = d$ で $-\infty$ の確定微分係数をもつ関数

例 1-21　**±∞ の不確定勾配**

図 1-13 の関数 $f(x)$ は区間 $[a,b]$ で連続であるが，区間 (a,b) 内の点 d で左微分係数は $+\infty$，右微分係数は $-\infty$ であり，確定した微分係数をもたない．この場合，ロールの定理が成立せず，区間 (a,b) 内に $f'(c) = 0$ である点 c は存在しない．■

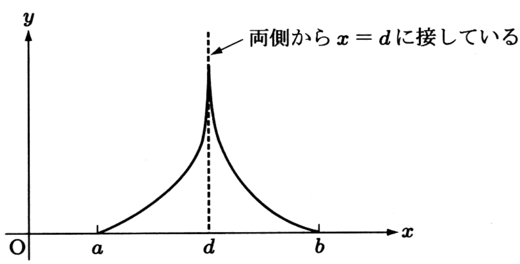


図 1-13　$x = d$ で $\pm\infty$ の不確定勾配をもつ関数

例 1-22　**有限の不確定勾配**

図 1-14 の関数 $f(x)$ は区間 $[a,b]$ で連続であり，区間 (a,b) 内で微分係数は有限であるが，点 d で左右の微分係数が一致せず，確定した微分係数をもたない．この場合，

ロールの定理が成立せず，区間 (a,b) 内に $f'(c)=0$ である点 c は存在しない．■

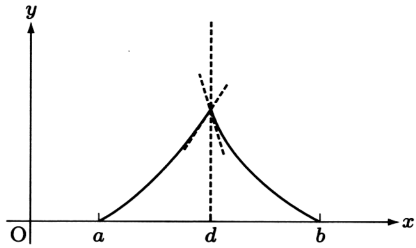


図 1-14　$x=d$ で左右の有限な微分係数が一致しない関数

1-7　平均値の定理

「A 地点から B 地点まで車で時速 40km で走る」などと無造作にいうことがあるが，車は停車した状態から加速し，最後は減速して停止するのだから，決して一定の速さで走ることはない．両地点の距離を所要時間でわったものは「平均速度」である．その平均速度と同じ速度で走っていた地点が必ず一ヶ所ある，というのが平均値の定理である．

定理 1-5　平均値の定理　関数 $f(x)$ が区間 $[a,b]$ で連続，かつ区間 (a,b) のすべての点で確定した(有限または無限)微分係数をもつならば，区間 (a,b) の少なくとも 1 点 c において，

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\qquad(a<c<b)$$

が成立する．この式を

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a+\theta(b-a))\qquad(0<\theta<1)$$

と表現することもできる．

証明） 視覚的にはロールの定理の図 1-11 の座標軸を傾けて図 1-15 の x'-y' 軸になったと考えると理解できるが，以下厳密に証明する．関数

$$h(x)\equiv f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

は，

$$h(a)=h(b)=0$$

であるゆえ，ロールの定理により

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \qquad (a < c < b)$$

となる c が存在する．ゆえに

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad (a < c < b)$$

を得る（図 1-15）．

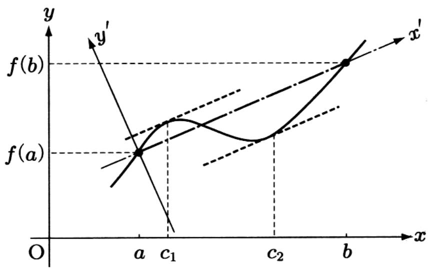


図 1-15　平均値の定理

定理 1-6　積分の平均値の定理　積分区間 $[a, b]$ において $f(x)$ が連続，また，$g(x)$ が積分可能かつ一定符号であるならば，次式を満たすような点 ξ がその区間内に存在する．

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx \qquad (a < \xi < b)$$

証明）$g(x) > 0$ として一般性を失わない（$g(x) < 0$ ならば，$-g(x)$ を対象とする）．

閉区間 $[a, b]$ において $f(x)$ が連続であるから，その最大値 M および最小値 m が存在する．ゆえに

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$$

が成り立つ．区間 $[a, b]$ で積分すると，

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M\int_a^b g(x)\,dx$$

すなわち，

$$m \leq \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx}{\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx} \leq M$$

である．したがって，

$$\frac{\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx}{\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx} = f(\xi)$$

を満たす $a < \xi < b$ が存在する．

1-8　コーシーの定理

フランスの数学者コーシーは，複素関数論をはじめ，数学のあらゆる分野で卓越した業績を残したが，とりわけ，連続性，微分可能性など「無限小」の数学の厳密化に果たした役割は大きい．

定理 1-7　コーシーの定理　関数 $f(x), g(x)$ が区間 $[a, b]$ で連続，かつ区間 (a, b) のすべての点で有限確定した微分係数をもち，さらに，$f'(x), g'(x)$ は，区間 (a, b) の 1 点で同時に 0 になることがなく，$g(a) \neq g(b)$ であるとする．このとき，区間 (a, b) の少なくとも 1 点 c において，

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (a < c < b)$$

が成立する．

一見するとコーシーの定理は，平均値の定理を分母・分子においただけのようであるが，分母・分子の c が同一であるのがポイントである．

証明） 関数

$$h(x) \equiv f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$$

は，

$$h(a) = h(b) = f(a)g(b) - f(b)g(a)$$

であるゆえ，ロールの定理により

$$h'(c) = f'(c)(g(b) - g(a)) - g'(c)(f(b) - f(a)) = 0 \qquad (a < c < b)$$

となる c が存在する．

$$g(a) \neq g(b)$$

であり，$f'(x)$ と $g'(x)$ は同時に 0 にならないから，

$$g'(c) \neq 0$$

である．ゆえに

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (a < c < b)$$

■ [不定形の極限の計算]

コーシーの定理を用いて，多くの不定形の極限を容易に求めることができる．たとえば，関数 $f(x), g(x)$ が点 a で同時に 0 となる不定形

$$f(a) = 0, \qquad g(a) = 0$$

であるが，点 a の近傍で有限確定した微分係数をもち，かつ，$f'(x), g'(x)$ は有限個の点でのみ同時に 0 になる（点 a の十分近くでは同時に 0 にならない）とする．この場合，コーシーの定理により，

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{g(a+h)-g(a)} = \frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \frac{f'(a+\theta h)}{g'(a+\theta h)} \qquad (0 < \theta < 1)$$

であるから，

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \lim_{h\to 0}\frac{f'(a+\theta h)}{g'(a+\theta h)} \qquad (0 < \theta < 1)$$

すなわち，

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

を得る．

例 1-23

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}$$ ■

コーシーの定理は a が $\pm\infty$ の場合にも成立する．すなわち，$x = 1/t$ と変数変換することにより，

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0\pm}\frac{f(1/t)}{g(1/t)} = \lim_{t\to 0\pm}\frac{-(1/t^2)f'(1/t)}{-(1/t^2)g'(1/t)} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

を得る．

例 1-24

$$\lim_{x\to+\infty} x\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\log(1+1/x)}{1/x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{-1/x^2}{1+1/x}}{-1/x^2} = 1$$ ■

また，∞/∞ 型の不定形，すなわち，

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$$

の場合にも適用可能である．コーシーの定理により，

$$\frac{f(x)-f(x+h)}{g(x)-g(x+h)} = \frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{1-f(x+h)/f(x)}{1-g(x+h)/g(x)} = \frac{f'(x+\theta h)}{g'(x+\theta h)}, \qquad 0<\theta<1$$

ゆえに，

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x+\theta h)}{g'(x+\theta h)}\cdot\frac{1-g(x+h)/g(x)}{1-f(x+h)/f(x)}$$

となる．ここで，h を一定としたまま $x\to a$ の極限をとると，

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a+\theta h)}{g'(a+\theta h)}$$

続いて，$h\to 0$ の極限をとると，

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{h\to 0}\frac{f'(a+\theta h)}{g'(a+\theta h)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

を得る．

例 1-25

$$\lim_{x\to 0}(x\log x) = \lim_{x\to 0}\frac{\log x}{1/x} = \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/x^2} = 0$$ ■

1-9 テイラーの定理

テイラーの定理およびテイラー級数は，微積分学の中でもっとも使用頻度の高い重要な定理である．

定理 1-8 テイラー(Taylor, 1685-1731)の定理 関数 $f(x)$ が区間 $[a,b]$ で連続，かつ区間 (a,b) のすべての点で有限確定した $n+1$ 階微分係数をもつならば，

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

と級数展開することができる．

証明) 部分積分の繰り返しにより，テイラー級数

$$f(x)-f(a) = \int_a^x f'(t)\cdot 1\,dt = [f'(t)(t-x)]_a^x - \int_a^x f''(t)(t-x)\,dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (-1) f^{(k+1)}(a) \frac{(a-x)^{k+1}}{(k+1)!} + (-1)^n \int_a^x f^{(n+1)}(t) \frac{(t-x)^n}{n!}\, dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!} (x-a)^{k+1} + \int_a^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!}\, dt$$

を得る．

テイラー級数において $a = 0$ としたもの

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(0)}{(k+1)!} x^{k+1} + \int_0^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!}\, dt$$

をマクローリン(Maclaurin, 1698-1746)級数と呼ぶ．

定理 1-6　積分の平均値の定理(1-7節)により，積分区間 $[a, x]$ において $F(t)$ が連続，また $H(t)$ が積分可能かつ一定符号であるならば，次式を満たすような点 ξ がその区間内に存在する．

$$\int_a^x F(t)H(t)\, dt = F(\xi) \int_a^x H(t)\, dt, \qquad a < \xi < x$$

これを用いて，残差(剰余項) $R_n(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n\, dt$ をさまざまな形に表現することができる．

$$\begin{aligned}
R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \int_a^x (x-t)^n\, dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \\
R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x-\xi)^n \int_a^x dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x-\xi)^n (x-a) \\
R_n(x) &= \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n \frac{G'(t)}{G'(t)}\, dt \\
&= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x-\xi)^n \frac{1}{G'(\xi)} \int_a^x G'(t)\, dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x-\xi)^n \frac{G(x)-G(a)}{G'(\xi)}
\end{aligned} \tag{1-9-1}$$

ここに，$G(t)$ は区間 (a, b) のすべての t において微分可能で，かつ $G'(t) \neq 0$ の条件を満たす任意の関数である．なお，$n = 0$ (剰余項のみ)とすると「平均値の定理」である．

残差 $R_n(x)$ の式 (1-9-1) で，$a = 0, \xi = \theta x$ $(0 < \theta < 1)$ とおくと，それぞれ，次式となる．

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!} (1-\theta)^n x^{n+1}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!} \frac{G(x)-G(a)}{G'(\theta x)} (1-\theta)^n x^n$$

1-10　代表的な初等関数・代数関数のテイラー級数展開

三角関数，指数関数，対数関数，双曲線関数などの初等関数と代数関数のうち，代表的なもののテイラー級数展開を求めておく．

■ [正弦関数]

正弦関数 $\sin x$ の $x=0$ まわりのテイラー級数展開は

$$\sin x = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \frac{x^{2n}}{(2n)!}\sin(\theta x + n\pi)$$

であり，$2n-1$ 次項までの残差

$$R(2n-1, x) = \frac{x^{2n}}{(2n)!}\sin(\theta x + n\pi)$$

の絶対値 $|R(2n-1,x)|$ は，x のすべての実数値 $(-\infty < x < \infty)$ で 0 に収束する（演習問題 1-1 (2)）．

$$\lim_{n\to\infty} |R(2n-1,x)| = 0 \qquad (-\infty < x < \infty)$$

ゆえに，正弦関数の無限級数表示

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad (-\infty < x < \infty) \qquad (1\text{-}10\text{-}1)$$

を得る．図 1-16 は，$\sin x$ とその第 n 項までの部分和 $(n = 1 \sim 6)$ を比較している．

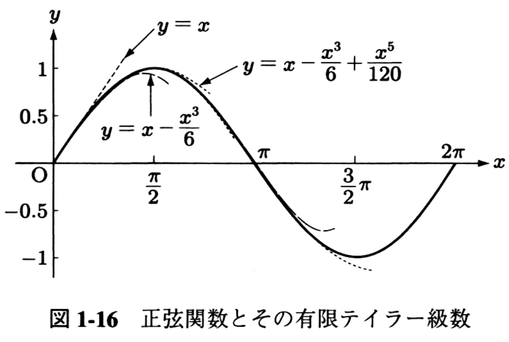


図 1-16　正弦関数とその有限テイラー級数

■ [余弦関数]

余弦関数 $\cos x$ の $x=0$ まわりのテイラー級数展開は

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sin(\theta x + (n+1)\pi)$$

であり，$2n$ 次項までの残差

$$R(2n, x) = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sin(\theta x + (n+1)\pi)$$

の絶対値 $|R(2n, x)|$ は x のすべての実数値 $(-\infty < x < \infty)$ で 0 に収束する．

$$\lim_{n\to\infty} |R(2n, x)| = 0 \qquad (-\infty < x < \infty)$$

ゆえに，余弦関数の無限級数表示

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad (-\infty < x < \infty) \qquad (1\text{-}10\text{-}2)$$

を得る．

■ [指数関数]

指数関数 e^x の $x = 0$ まわりのテイラー級数展開は

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + e^{\theta x} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (0 < \theta < 1)$$

であり，第 n 項までの残差

$$R(n, x) = e^{\theta x} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

の絶対値 $|R(n, x)|$ は x のすべての実数値 $(-\infty < x < \infty)$ で 0 に収束する．

$$\lim_{n\to\infty} |R(n, x)| = 0 \qquad (-\infty < x < \infty)$$

ゆえに，指数関数の無限級数表示

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \qquad (-\infty < x < \infty) \qquad (1\text{-}10\text{-}3)$$

を得る．

厳密には，複素関数論の解析接続の手続きを踏まねばならないが，式 (1-10-3) において，

$$x = i\theta$$

とおくと，オイラー(Euler, 1707 - 1783)の公式

$$e^{i\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^k}{k!} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \frac{(i\theta)^7}{7!} + \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots\right)$$
$$= \cos\theta + i\sin\theta$$

を得る.

■ [対数関数]

対数関数 $\log(1+x)$ の $x=0$ まわりのテイラー級数展開は

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{t+1}\,dt \qquad (-1 < x)$$

であり，第 n 項までの残差

$$R(n,x) = (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{t+1}\,dt$$

の絶対値 $|R(n,x)|$

$$|R(n,x)| = \left|\int_0^x \frac{t^n}{t+1}\,dt\right| \leq \int_0^x t^n\,dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (0 \leq x)$$
$$|R(n,x)| = \int_x^0 \frac{(-t)^n}{t+1}\,dt \leq \frac{1}{s+1}\int_x^0 (-t)^n\,dt = \frac{1}{s+1}\frac{|x|^{n+1}}{n+1} \qquad (-1 < s \leq x < 0)$$

は $-1 < x < 1$ のとき 0 に収束する.

$$\lim_{n\to\infty} |R(n,x)| = 0 \qquad (-1 < x < 1)$$

さらに，級数は $x = 1$ で収束するゆえ，定理 5-13（アーベルの定理：後述）により，$x=1$ でも成立する．ゆえに，対数関数の無限級数表示

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad (-1 < x \leq 1) \qquad (1\text{-}10\text{-}4)$$

を得る.

■ [双曲線正弦関数]

双曲線正弦(hyperbolic sine)関数 $\sinh x$ の $x=0$ まわりのテイラー級数展開は

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \frac{x^{2n}}{(2n)!}\sinh\theta x$$

であり，$2n-1$ 次項までの残差

$$R(2n-1,x) = \frac{x^{2n}}{(2n)!}\sinh\theta x$$

の絶対値 $|R(2n-1,x)|$ は x のすべての実数値 $(-\infty < x < \infty)$ で 0 に収束する．

$$\lim_{n\to\infty} |R(2n-1,x)| = 0 \qquad (-\infty < x < \infty)$$

ゆえに，双曲線正弦関数の無限級数表示

$$\sinh x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad (-\infty < x < \infty)$$

を得る．

[双曲線余弦関数]

双曲線余弦(hyperbolic cosine)関数 $\cosh x$ の $x=0$ まわりのテイラー級数展開は

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sinh \theta x$$

であり，$2n$ 次項までの残差

$$R(2n,x) = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sinh \theta x$$

の絶対値 $|R(2n,x)|$ は x のすべての実数値 $(-\infty < x < \infty)$ で 0 に収束する．

$$\lim_{n\to\infty} |R(2n,x)| = 0 \qquad (-\infty < x < \infty)$$

ゆえに，双曲線余弦関数の無限級数表示

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad (-\infty < x < \infty)$$

を得る．

[逆正接関数]

5章例5-7および定理5-13（アーベルの定理）により，逆正接関数 $\tan^{-1} x$ の $x=0$ まわりのテイラー級数展開

$$\tan^{-1} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad (-1 < x \le 1)$$

を得る．

■ [二項展開式]

二項展開式 $(1+x)^\alpha$ の $x=0$ まわりのテイラー級数展開は

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + \frac{(1-\theta)^n}{(1-\theta x)^{n-\alpha}} \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} \qquad (-1 < x)$$

$$\binom{\alpha}{n} \equiv \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \qquad \text{：二項係数}$$

であり，第 n 項までの残差

$$R(n,x) = \frac{(1-\theta)^n}{(1-\theta x)^{n-\alpha}} \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1}$$

の絶対値 $|R(n,x)|$ は $-1<x<1$ の範囲で 0 に収束する．

$$\lim_{n\to\infty} |R(n,x)| = 0 \qquad (-1<x<1)$$

ゆえに，二項展開式の無限級数表示

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots \qquad (-1<x<1)$$

を得る．

1-11　漸近関係と関数の相対的大きさに関する記号

独立変数 x がある値 x_0 に近づく極限における，二つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ の相対的大きさに関する記号を定義する．

■ [小文字のオーダー記号 o]

まず，$f(x)$ と $g(x)$ が次の関係

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

にあるとき，「$x \to x_0$ の極限(±∞ を含む)において(あるいは単に「$x \to x_0$ のとき」)，$f(x)$ は $g(x)$ より(はるかに)小さい($g(x)$ は $f(x)$ より(はるかに)大きい)」といい，これを小文字のオーダー記号 o を用いて

$$f(x) = o(g(x)) \qquad x \to x_0$$

と表記し，「$f(x)$ は $g(x)$ より**小さなオーダーである**」と読む．

例 1-26

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{N}(-x)^n + R_N(x)$$

において，その第 N 部分和の残差

$$R_N(x) = \frac{(-x)^{N+1}}{1+x}$$

は，$x \to 0$ の極限で，x^N に比べて無視できるほど小さい．すなわち，

$$\lim_{x\to 0}\frac{R_N(x)}{x^N} = 0$$

したがって，

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{N}(-x)^n + o(x^N) \qquad x \to 0$$

と書く．具体的には，たとえば，$N = 3$ にとれば

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3) \qquad x \to 0$$

となる． ■

■ [漸近関係記号]

次に，$f(x)$ と $g(x)$ が

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

すなわち，

$$f(x) - g(x) \ll f(x) \qquad x \to x_0$$

の関係にあるとき，「$x \to x_0$ の極限において(のとき)，$f(x)$ は $g(x)$ に**漸近する**」といい，これを

$$f(x) \sim g(x) \qquad x \to x_0$$

または

$$g(x) \sim f(x) \qquad x \to x_0$$

と表記する．このように漸近関係記号 ~ で結ばれた関係式を**漸近関係式**と呼ぶ†5．

†5　小文字のオーダー記号 o，大文字のオーダー記号 O を含む関係式を含めて，漸近関係式と呼ぶことがある．

例 1-27

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} + R_N(x)$$

において，その第 N 部分和の残差

$$R_N(x) = \frac{(\theta x)^{N+1}}{(N+1)!} \qquad (0 < \theta < 1)$$

は，$x \to 0$ の極限で，もとの指数関数 e^x $\left(\text{あるいは，その第 } N \text{ 部分和} \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!}\right)$ に比べて無視できるほど小さい．すなわち，

$$\lim_{x\to 0} \frac{R_N(x)}{e^x} = \lim_{x\to 0} \frac{R_N(x)}{\sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!}} = 0$$

したがって，

$$e^x \sim 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^N}{N!} \qquad x \to 0$$

と書く．具体的には，たとえば，$N = 3$ にとれば

$$e^x \sim 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \qquad x \to 0$$

となる． ■

■ [大文字のオーダー記号 O]

さらに，$f(x)$ と $g(x)$ が $x = x_0$ の近傍で，x によらないある正の定数 K について，

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq K$$

の関係を満たすとき，すなわち，その比が有界であるとき，「$x \to x_0$ のとき，$f(x)$ は $g(x)$ の**オーダーである**」といい，これを大文字のオーダー記号 O を用いて

$$f(x) = O(g(x)) \qquad x \to x_0$$

と表記する．

例 1-28

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} + R_N(x)$$

において，その第 N 部分和の残差

$$R_N(x) = \frac{(\theta x)^{N+1}}{(N+1)!} \qquad (0 < \theta < 1)$$

は，$x \to 0$ の極限で，x^{N+1} との比が有界である．すなわち，

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{R_N(x)}{x^{N+1}}\right| \leq \frac{1}{(N+1)!}$$

したがって，

$$e^x = \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} + O(x^{N+1}) \qquad x \to 0$$

と書く．具体的には，たとえば，$N = 3$ にとれば

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + O(x^4) \qquad x \to 0$$

となる． ■

以下の各章で漸近関係式が活躍する．

第 1 章の演習問題

1-1　次の各関数の収束・発散を調べ，収束する場合には極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{e^x}$ （α：実数）　(2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^x$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{1/x^2}$　(6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(x - x^2\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$

1-2　漸化式

$$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$$

で定義されるフィボナッチ数列（高校で履修）の一般項は，特性方程式

$$\alpha^2 = p\alpha + q$$

の 2 根が異なる場合 ($\alpha \neq \beta$)，

$$a_n = \frac{\alpha^{n-1}(a_2 - \beta a_1) - \beta^{n-1}(a_2 - \alpha a_1)}{\alpha - \beta} \qquad ①$$

であり，重根の場合，

$$a_n = \alpha^n\left((n-1)\frac{a_2}{\alpha^2} - (n-2)\frac{a_1}{\alpha}\right) \qquad ②$$

である．高校では解①，②を別個に得るが，ここでは①で $\beta \to \alpha$ とした極限として②を求めよ．

1-3 強制振動

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega_0^2 y = C \cos \omega t$$

の一般解は，$\omega \neq \omega_0$ のとき，

$$y = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t + \frac{C}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t \qquad ③$$

$\omega = \omega_0$（共鳴）のとき，

$$y = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t + \frac{C}{2\omega_0} t \sin \omega_0 t \qquad ④$$

である．高校では，これら二つの解を別個に得るが，ここでは解③の $\omega \to \omega_0$ とした極限として解④を導け．

1-4 連続関数の合成関数は連続であることを証明せよ．

すなわち，区間 $a \leq x \leq b$ において $f(x)$ が連続であり，$\lim_{x \to \alpha} g(x) = c$（$a \leq c \leq b$, α は $\pm\infty$ を含む任意定数）であるならば，$\lim_{x \to \alpha} f(g(x)) = f(c)$ を証明せよ．

1-5 $|x| < 1$ のとき，$\sqrt{1-x}$, $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ を $x = 0$ のまわりにテイラー展開（マクローリン展開）せよ．

1-6 $|x| < \dfrac{1}{2}$ のとき，$\dfrac{1}{(2x+1)(x-1)}$ を $x = 0$ のまわりにテイラー展開せよ．

1-7 ［三角関数表の作成］

区間 $[0, \pi/2]$ で $\sin x$ を（小数第 5 位を四捨五入して）小数第 4 位まで正確に得るには，マクローリン展開の何次の項までとる必要があるか．

1-8 ［o, O の演算］

次式を証明せよ．

（1）$O(o(f(x))) = o(O(f(x)))$　　（2）$o(o(f(x))) = o(f(x))$

（3）$o(f(x))o(g(x)) = o(f(x)g(x))$

第2章

数列と級数の収束

いよいよ，数列と級数の理論に入る．本章では，まず数列と級数の収束と発散を定義し，発散の形態を単純発散，有界振動，振動発散の三つに分類する．さらに，収束するための条件と，収束する数列・級数のもつ性質を論じる．なお，数列および級数は関数の一種であるから，その収束性すなわち極限値の存在性は，1-2 節で論じた関数の極限の理論に従う．

収束する数列には多様性があり，後に第 4 章で取り扱う条件収束数列は，「項の順序を変更することにより任意の値に収束しうる」(定理 4-8：リーマンの定理)をはじめ，初学者の目には意外な諸性質を有する．それゆえ，本章で整理する，収束するという条件のみから得られる帰結をしっかりと理解しておくことが重要である．

2-1　数列と級数

関数 a_k の独立変数 k に自然数を 1 から順に代入して得られる，数の「順序を有する集合」$\{a_k \mid k : \text{自然数}\} = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$ を **(無限) 数列** ((infinite) sequence) と呼ぶ．その第 $1, 2, \cdots, n$ 番目の要素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ をそれぞれ初項，第 2 項，$\cdots$，第 n 項(一般項)と呼ぶ．さらに，$S_n \equiv \sum_{k=1}^{n} a_k$ をその数列による級数の**第 n 部分和** (n-th partial sum) と呼び，またその $n \to \infty$ の極限 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \equiv \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$ を **(無限) 級数** ((infinite) series) と呼び，また特にその数値を(無限)級数の和と呼ぶ．数列 $\{a_k\}$ の第 $1, 2, \cdots$ 番目の要素 $a_1, a_2, \cdots$ を同時に，それぞれ級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ の初項，第 2 項，$\cdots$ と呼ぶ．第 n 部分和 S_n 自体が数列でもある．

例 2-1

等比数列 $\{a_k = ar^{k-1} \mid k : 自然数\}$ の初項，第 2 項，第 n 項(一般項)はそれぞれ，

$$a_1 = a, \qquad a_2 = ar, \qquad a_n = ar^{n-1}$$

であり，その級数の第 n 部分和は

$$S_n = \begin{cases} a\dfrac{1-r^n}{1-r} & (r \neq 1) \\ na \quad (r = 1) \end{cases}$$

である．無限級数 (の和) は，公比 r の絶対値が 1 より小さいときのみ存在し，

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{a}{1-r} \qquad (-1 < r < 1)$$

である．■

2-2　収束，および三型の発散

有限な極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ が存在するとき，すなわち，任意の $\varepsilon > 0$ が与えられたとき，$n > N(\varepsilon)$ を満足するすべての n の値に対して $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成立するような $N(\varepsilon)$ を定めることができるとき，数列 $\{a_n \mid n : 自然数\}$ あるいは単に a_n は極限値 α に**収束する** (to converge, to be convergent)，という．有限な極限値をもたないとき，数列 a_n は**発散する** (to diverge, to be divergent) という．

発散する数列を三型に分類する．その第 1 は，$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ または $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ の場合であり，これを**単純発散** (to be properly divergent) と呼ぶ．第 2，3 は，$\pm\infty$ も含めて極限値が存在しない場合であり，a_n が有界であるとき**有界振動** (to oscillate finitely) と呼び，また有界でないとき**振動発散** (to oscillate infinitely) と呼ぶ．

たとえば，$a_n = \dfrac{1}{n+1}, a_n = (-0.5)^n$ は収束する (図 2-1) が，$a_n = n+1, a_n = 1.5^n$ は単純発散し (図 2-2)，$a_n = \cos n, a_n = (-1)^n$ は有界振動 (図 2-3) し，また $a_n = n\cos n, a_n = (-1.2)^n$ は振動発散する (図 2-4)．

級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は，第 n 部分和 $S_n \left(= \sum_{k=1}^{n} a_k\right)$ が数列として収束／単純発散／有界振動／振動発散／するかに応じて，それぞれ収束／単純発散／有界振動／振動発散／するという．そして，有限な極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n = \beta$ が存在するとき，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は和 β に収束するといい，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \beta$ と書く．

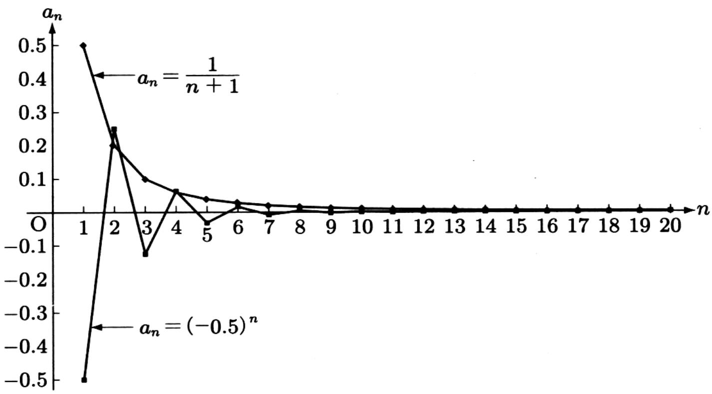


図 2-1　収束する数列

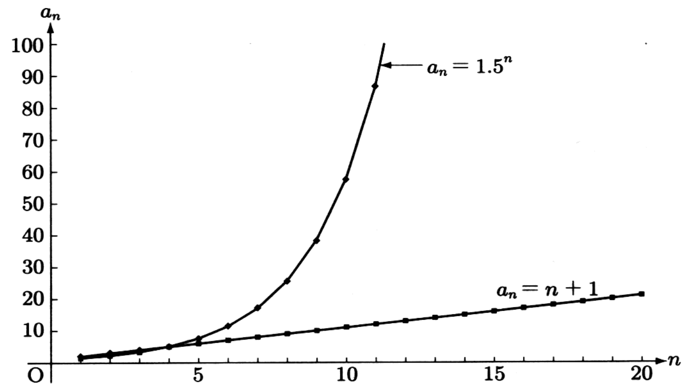


図 2-2　単純発散する数列

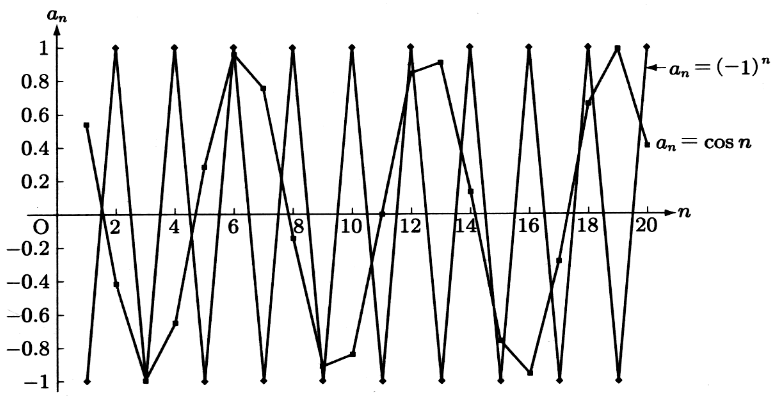


図 2-3　有界振動する数列

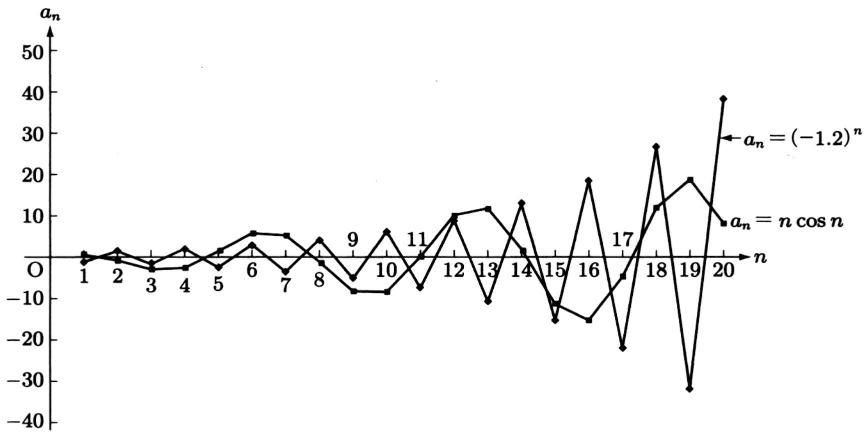


図 2-4 振動発散する数列

例 2-2 無限等比級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{a}{1-r} & (a=0,\ \text{または}\ |r|<1) \\ \text{単純発散} & (a \neq 0,\ r \geq 1) \\ \text{有界振動} & (a \neq 0,\ r = -1) \\ \text{振動発散} & (a \neq 0,\ r < -1) \end{cases}$$

■

例 2-3

θ が 0 または 2π の整数倍でないとき，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(n\theta+\varphi)$ および $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos(n\theta+\varphi)$ は，有界振動する．

証明） $\theta = \pi$ であれば，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n\theta+\varphi) = \sin\varphi\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\cos(n\theta+\varphi) = \cos\varphi\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$$

であるから，明らかに有界振動する．そこで，以下では $0<\theta<\pi$，または $\pi<\theta<2\pi$ とする．

まず，$\sin(n\theta+\varphi)$ または $\cos(n\theta+\varphi)$ が $n\to\infty$ の極限で 0 に収束しないことは明らかであるから，後出する定理 2-4 により $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(n\theta+\varphi)$ および $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos(n\theta+\varphi)$ は収束しない．次に，

$$\sum_{n=1}^{N} 2\sin\frac{\theta}{2}\sin(n\theta+\varphi) = \sum_{n=1}^{N}\left[\cos\left\{\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta+\varphi\right\} - \cos\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta+\varphi\right\}\right]$$

$$= \cos\left\{\frac{1}{2}\theta + \varphi\right\} - \cos\left\{\left(N + \frac{1}{2}\right)\theta + \varphi\right\}$$

$$= 2\sin\left\{\frac{(N+1)\theta}{2} + \varphi\right\}\sin\frac{N\theta}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{N} 2\sin\frac{\theta}{2}\cos(n\theta + \varphi) = \sum_{n=1}^{N}\left[\sin\left\{\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta + \varphi\right\} - \sin\left\{\left(n - \frac{1}{2}\right)\theta + \varphi\right\}\right]$$

$$= -\sin\left(\frac{1}{2}\theta + \varphi\right) + \sin\left\{\left(N + \frac{1}{2}\right)\theta + \varphi\right\}$$

$$= 2\cos\left\{\frac{(N+1)\theta}{2} + \varphi\right\}\sin\frac{N\theta}{2}$$

であるから，

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\sin(n\theta + \varphi)\right| = \left|\frac{\sin\{(N+1)\theta/2 + \varphi\}\sin(N\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\right| \leq \left|\frac{1}{\sin(\theta/2)}\right|$$

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\cos(n\theta + \varphi)\right| = \left|\frac{\cos\{(N+1)\theta/2 + \varphi\}\sin(N\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\right| \leq \left|\frac{1}{\sin(\theta/2)}\right|$$

すなわち有界である．ゆえに，$\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n\theta + \varphi)$ および $\sum_{n=1}^{\infty}\cos(n\theta + \varphi)$ は有界振動する． ■

2-3　収束条件と基本法則

関数・数列の極限に関して，それまでの直観的な理論を排し，厳密な理論を打ち立てたのがコーシーである．

定理 2-1　コーシーの収束条件　数列 $\{a_n \mid n: 自然数\} = \{a_1, a_2, \cdots\}$ が収束するための必要十分条件は，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$n > N$ のすべての n および任意の自然数 m について，

$$|a_n - a_{n+m}| < \varepsilon$$

を満たす自然数 $N = N(\varepsilon)$ を定めることができることである．

証明）　i ）必要条件

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \beta$ とおくと，任意の $\varepsilon > 0$ が与えられたとき，$n > N$ のすべての n について $|a_n - \beta| < \varepsilon/2$ が成立するような $N = N(\varepsilon/2)$ を定めることができる．したがって，任意の自然数 m について $|a_{n+m} - \beta| < \varepsilon/2$ が成立する．ゆえに，

$$|a_n - a_{n+m}| \leq |a_n - \beta| + |a_{n+m} - \beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ii）十分条件

$n > N(\varepsilon)$ のすべての n について $|a_n - a_{N+1}| < \varepsilon$ が成立する．ゆえに $a_{N+1} - \varepsilon < a_n < a_{N+1} + \varepsilon$ すなわち，a_n は有界であり，

$$a_{N+1} - \varepsilon \le \underline{\lim}\, a_n \le \overline{\lim}\, a_n \le a_{N+1} + \varepsilon$$

ε は任意の正の数であるから，

$$\underline{\lim}\, a_n = \overline{\lim}\, a_n$$

すなわち収束する．

例 2-4

等比数列 $\{a_k = ar^{k-1}\}$ は

$$|ar^{n-1} - ar^{n+m-1}| \le |ar^{n-1}||1 - r^m| < |ar^{n-1}| \qquad (|r| < 1)$$

であるから，

$$(n-1)\log|r| + \log|a| < \log\varepsilon$$

すなわち，

$$n > N(\varepsilon) \equiv 1 + \frac{\log\varepsilon - \log|a|}{\log|r|}$$

である n，およびすべての自然数 m について，$|a_n - a_{n+m}| < \varepsilon$ が成立する．このような $N = N(\varepsilon)$ を定めることができるので，等比数列 $\{a_k\}$ は $|r| < 1$ のとき収束する．■

定理 2-1 の数列として級数の第 n 部分和 $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ を選ぶと，次の定理となる．

定理 2-2　級数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ が収束するための必要十分条件は，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$n > N$ のすべての n および任意の自然数 m について，

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k\right| < \varepsilon \tag{2-3-1}$$

を満たす自然数 $N = N(\varepsilon)$ を定めることができることである．

定理 2-2 からただちに次の定理を得る．

定理 2-3　級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が，収束，単純発散，有界振動，振動発散するという性質は，その級数から有限個の項を取り除いた場合，またその級数に有限個の項を付け加えた場合にも不変である．つまり，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が，収束，単純発散，有界振動，振

動発散するという性質は，任意の N より大きいすべての項 $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ により定まる性質である．したがって，

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha \quad \text{ならば,} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \alpha + a_0 \quad \text{また} \quad \sum_{n=2}^{\infty} a_n = \alpha - a_1$$

である．

証明） 前半は定理 2-1，2-2 の証明より明らか．

$$T_n \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k, \qquad U_n \equiv \sum_{k=2}^{n} a_k$$

とおくと，

$$T_n = S_n + a_0, \qquad U_n = S_n - a_1$$

ゆえに，

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} S_n + a_0 = \alpha + a_0$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} S_n - a_1 = \alpha - a_1$$

を得る．

定理 2-4　級数が収束する $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha\right)$ ならば，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である．すなわち，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ は，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するための必要条件である．

証明） 定理 2-2 式 (2-3-1) で $m = 1$ とおいたもの．

例 2-5

収束する級数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ $(p > 1)$ において，$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^p} = 0$ である．■

定理 2-4 の対偶として，「$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ならば，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束しない」が成立する．

例 2-6

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ $(p \leq 0)$ は単純発散する．■

例 2-3（再掲）

θ が 0 または 2π の整数倍でないとき，$\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n\theta+\varphi)$ および $\sum_{n=1}^{\infty}\cos(n\theta+\varphi)$ は，収束せず，有界振動する．■

定理 2-5　数列の 1 次結合の極限

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha \quad ならば, \quad \sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\alpha \quad (c：定数)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha \quad かつ \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta \quad ならば \quad \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) = \alpha+\beta$$

証明)

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} ca_n = c\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} a_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n = c\alpha$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}(a_n+b_n) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} a_n + \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} b_n = \alpha+\beta$$

定理 2-6　カッコの挿入可能　$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$ ならば，級数の各項の順序を変えずに，カッコを挿入してくくった新しい級数も α に収束する．

証明) 級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ の各項の順序を変えずに，カッコを挿入してくくった新しい級数を $\sum_{l=1}^{\infty} b_l$ とおき，その第 m 部分和を $T_m = \sum_{l=1}^{m} b_l$ と書く．$T_m = \sum_{l=1}^{m} b_l$ がもとの数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $N(m)$ 項までの和であるならば，

$$T_m = \sum_{l=1}^{m} b_l = \sum_{k=1}^{N(m)} a_k = S_{N(m)}$$

ゆえに

$$\sum_{l=1}^{\infty} b_l = \lim_{m\to\infty} T_m = \lim_{m\to\infty} S_{N(m)} = \alpha$$

定理 2-6 は「収束する」という条件のみで成立することに注意する．逆に，カッコを取り去ると，同じ極限に収束しないことがある．

例 2-7

$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots=0$ であるが，$1-1+1-1+1-1+\cdots$ は有界振動する．■

第 2 章の演習問題

2-1　$\displaystyle\lim_{k\to+\infty} a_k = \alpha$ であるとき $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n} = \alpha$ であることを示せ（逆は真ならず）.

2-2　次の各級数が収束するか否かを調べ，収束する場合にはその和を求めよ.

（1）$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}$　　（2）$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$

2-3　次式を証明せよ.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)} = 1$$

2-4　級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が有界振動し，$a_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ ならば，級数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n(a_n - a_{n-1})$ もまた有界振動することを示せ.

2-5　（1）$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$，さらに，$b_n \geq 0\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ かつ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$，ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} b_k a_k}{\sum_{k=1}^{n} b_k} = \alpha$ であることを証明せよ.

（2）(1) の結果を用いて，次式を証明せよ.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \sin\dfrac{\theta}{k}}{\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}} = \theta$$

第3章

定符号数列とその級数

数列 $\{a_k \mid k:\text{自然数}\}$ のすべての項が一定の符号(0 を含む)であるとき，すなわち $a_k \geq 0$ または $a_k \leq 0$ であるとき，その数列を**定符号数列**(sequence whose non-zero terms are all of the same sign)と呼ぶ．問題によっては，正(負)であるか，0 以上(以下)であるかが重要な違いとなることもあるが，級数においてはその部分和 $S_n \equiv \sum_{k=1}^{n} a_k$ が振動せずに単調増加(減少)することと $a_k \geq 0$ $(a_k \leq 0)$ が同値であるので，定符号数列の定義に 0 を含める．

以下で明らかになるように，定符号数列においては有限数列で成立するほとんどの演算規則が成立する．つまり，初学者が常識的に許容したくなる「並べ替え，カッコの挿入・削除」の操作が可能である．

定符号数列のうち，負符号数列 $a_k \leq 0$ $(k = 1, 2, \cdots)$ はそのすべての項に $-$ (マイナス)符号をかけると，**正符号数列**(sequence of non-negative terms,「正項数列」ということもある) $a_k \geq 0$ $(k = 1, 2, \cdots)$ になるので，本章では正符号数列を取り扱う．

3-1 基本性質

数列としての第 n 部分和 $S_n \equiv \sum_{k=1}^{n} a_k$ が正の単調増加数列であるから，次の定理が成立する．

> **定理 3-1** 正符号数列の級数（以下，正符号級数と呼ぶ）$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は振動しない．すなわち，収束するか，あるいは単純発散する．

定理 3-2　正符号級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ が収束するための必要十分条件は，第 n 部分和 $S_n \equiv \sum_{k=1}^{n} a_k$ が有界であることである．

証明)　定理 1-3 により，上に有界な単調増加数列は収束する．また，単調増加数列が収束するためには有界でなければならない．

収束する級数の項の順序を変えずにカッコを挿入した新しい級数は，もとの級数と同じ値に収束する(定理 2-6)が，収束する級数の項の順序を変えずにカッコを削除した新しい級数は，もとの級数と同じ値に収束するとは限らない．しかし，正符号級数の場合には，カッコの挿入とともに削除も可能である．

定理 3-3　カッコの(挿入および)削除可能　正符号級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ にカッコを自由に挿入したものを $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ とすると，$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \alpha$ ならばカッコを削除した級数も $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \alpha$ であり，また $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ が単純発散するならば，$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ も単純発散する．

証明)　正符号級数 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ は定理 3-1 により収束するか，あるいは単純発散する(これが要点である)．そこでまず，$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ が収束する $\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \alpha\right)$ と仮定する．このとき，級数 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ からカッコをすべて取り外した級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ が α 以外の値に収束

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \beta\ (\neq \alpha) \tag{3-1-1}$$

するか，あるいは単純発散

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty \tag{3-1-2}$$

すれば，定理 2-6 により，級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ にカッコを挿入してくくった級数 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ も，式 (3-1-1) では同じ値に収束しなければならないし $\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \beta\ (\neq \alpha)\right)$，式 (3-1-2) では単純発散しなければならないことになる $\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \infty\right)$．したがって，$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は同じ値に収束する $\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \alpha\right)$．

また，$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ が単純発散するならば，同じ論証により $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ も単純発散する．

例 3-1　**正符号級数とそれからカッコを削除した級数**

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\right)+\left(\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}\right)+\cdots=\frac{7}{4}+\frac{7}{32}+\frac{7}{256}+\cdots=2$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}+\cdots=2$$ ■

定理 3-4　項の順序を変更可能　正符号級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ の項の順序を変更したものを $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ とすると，$\sum_{k=1}^{\infty} a_k=\alpha$ ならば $\sum_{k=1}^{\infty} b_k=\alpha$ であり，また $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ が単純発散するならば，$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ も単純発散する．

証明)　数列 $\{b_k\}$ は数列 $\{a_k\}$ の順序を変更したものであるから，すべての項について

$$b_k=a_{m(k)}$$

と，対応がつく．$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ の第 n 部分和

$$B_n\equiv\sum_{k=1}^{n} b_k$$

中に現れる $b_k=a_{m(k)}\ (k=1,2,\cdots,n)$ のうち最大の $m(k)$ を M とおくと，

$$B_n\equiv\sum_{k=1}^{n} b_k\le\sum_{k=1}^{M} a_k=S_M \tag{3-1-3}$$

が成立する．ここで，$n\to\infty$ のとき $M\to\infty$ である．

一方，数列 $\{a_k\}$ は数列 $\{b_k\}$ の順序を変更したものであるから，逆に，ある N が存在して

$$\sum_{k=1}^{M} a_k=S_M\le B_N=\sum_{k=1}^{N} b_k \tag{3-1-4}$$

が成立する．ここで，$M\to\infty$ のとき $N\to\infty$ である．

それゆえ，$\sum_{k=1}^{\infty} a_k=\alpha$ ならば，式 (3-1-3) により

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k\le\alpha$$

であり，一方，式 (3-1-4) により，

$$\alpha\le\sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

である．したがって，

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k=\alpha$$

である．

また $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ が単純発散するならば，式 (3-1-4) により $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ も単純発散する．

例 3-2　正符号級数とその項の順序を入れ替えた級数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}+\frac{1}{512}+\frac{1}{1024}+\cdots=\frac{1}{1-1/2}=2$$

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{8}+\frac{1}{256}+\frac{1}{1024}+\frac{1}{32}+\cdots+\left(\frac{1}{2^{4n}}+\frac{1}{2^{4n+2}}+\frac{1}{2^{2n+1}}\right)+\cdots$$

$$=\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{1-1/16}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-1/4}=2$$

■

定理 3-3, 3-4 および収束する数列で一般的に成立する定理 2-6 により，正符号数列の級数においては，級数中の項の順序を自由に変更し，また級数和の式にカッコを挿入，あるいは削除することができる．

3-2　収束の簡易判定法

正符号級数の収束判定法のうち，比較的簡単なものをいくつか紹介する．その第一は，対応する定積分を利用するものである．

定理 3-5　単調減少級数　正符号数列 $\{a_k\}$ が単調減少数列であるとき，正符号単調減少級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は

$$f(n)=a_n$$

を満たす関数の 1 から ∞ までの積分と，収束するか否かの性質を共有する（図 3-1）．さらに，$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k-\int_1^n f(x)dx\right)=\alpha$ が存在し，$0\leq\alpha\leq a_1$ を満たす．

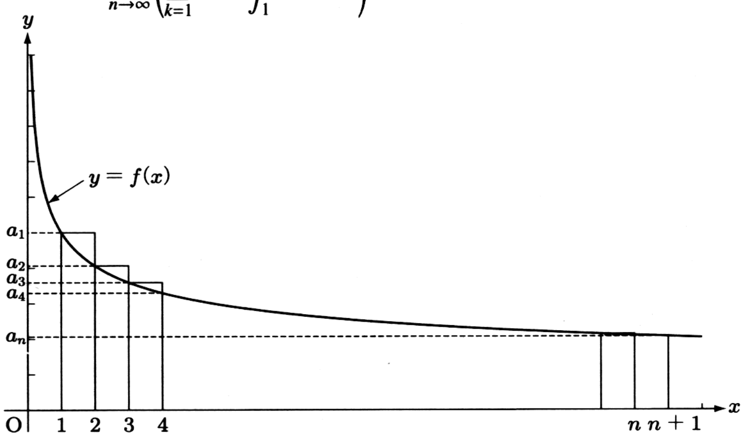


図 3-1　単調減少数列 a_n とそれに対応する単調減少関数 $f(x)$

証明） 図 3-1 から明らかなように

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx < \sum_{k=1}^{n} a_k < \int_1^{n} f(x)\,dx + a_1 \tag{3-2-1}$$

であるから，$n \to \infty$ の極限をとると，

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx < \sum_{k=1}^{\infty} a_k < \int_1^{\infty} f(x)\,dx + a_1$$

が成立する．ゆえに，右の不等式により $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ が収束すれば $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ も収束し，左の不等式により $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ が単純発散すれば $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ も単純発散する．

さて，図 3-1 より明らかなように，$\sum_{k=1}^{n} a_k - \int_1^{n} f(x)dx$ は n の単調減少関数である．また，式 (3-2-1) により

$$0 < \int_n^{n+1} f(x)dx < \sum_{k=1}^{n} a_k - \int_1^{n} f(x)dx < a_1$$

すなわち下に有界である．

したがって，$\sum_{k=1}^{n} a_k - \int_1^{n} f(x)dx$ は収束し，その極限値 α は $0 \leq \alpha \leq a_1$ である．

例 3-3　**オイラー定数**

$f(n) = a_n = 1/n$ とすると，式 (3-2-1) は

$$\log(n+1) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < \log n + 1$$

となる．したがって，$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n$ は収束し，

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \right) \leq 1$$

である．そこで，その極限値

$$\log\gamma \equiv \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n \right) = 0.57721566\cdots$$

を定義し，これを**オイラー**(Euler)**定数**と呼ぶ(7 章 例 7-12)．　■

収束あるいは発散することが判明している別の正符号級数と比較することにより，収束・発散を決定することができる．

定理 3-6　比較試験　正符号数列 $a_n \geq 0,\ b_n \geq 0\ (n = 1, 2, \cdots)$ に対して，n によらない正の定数 K とある自然数 N が存在し，

(Ⅰ)　$a_n < Kb_n\ (n > N)$ が成立するとき，$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ が収束するならば $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ もまた収束する．

(Ⅱ)　$a_n > Kb_n\ (n > N)$ が成立するとき，$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ が単純発散するならば $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ もまた単純発散する．

証明）　定理 1-2 により明らか．

これらを総合して，次のように表現することができる．

正符号数列 $a_n \geq 0,\ b_n \geq 0\ (n = 1, 2, \cdots)$ に対して，n によらない正の定数 K_1, K_2 とある自然数 N が存在し，

(Ⅲ)　$K_1 > a_n/b_n > K_2\ (n > N)$ が成立するとき，$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ が収束あるいは単純発散するのにあわせて，$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ も収束あるいは単純発散する．このとき，$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ と同様に振る舞う，という．

例 3-4　$\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{k^p}\right)$ **の収束・発散**

$p > 0$ のとき，$\lim_{k\to\infty} \dfrac{\log\left(1 + \frac{1}{k^p}\right)}{\frac{1}{k^p}} = 1$ であるから，$\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{k^p}\right)$ は $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ と同様に振る舞う．すなわち，

$p > 1$ のとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{k^p}\right)$ は収束し，

$1 \geq p > 0$ のとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{k^p}\right)$ は単純発散する（演習問題 3-8 参照）．

なお，$p \leq 0$ のとき，$\log\left(1 + \frac{1}{k^p}\right)$ が 0 に収束しないので，$\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{k^p}\right)$ は単純発散する．■

次の定理は正符号級数が収束するか否かを判定するためにもっとも簡単であり，まず試される方法である．

定理 3-7　比試験 (ratio test) またはダランベール (d'Alembert) 試験

$a_n \geq 0\ (n = 1, 2, \cdots)$ に対して，ある自然数 N より大きいすべての n について，

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < s < 1$$

が成立するならば，$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は収束する．特に，

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = s < 1$$

ならば，$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は収束する．

また，

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > s > 1$$

が成立するならば，$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は単純発散する．特に，

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = s > 1$$

ならば，$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は単純発散する．

証明）

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{N} a_k + \lim_{n \to \infty} \sum_{k=N+1}^{n} a_k$$

$$< \sum_{k=1}^{N} a_k + a_{N+1}\{1 + s + s^2 + \cdots\} = \sum_{k=1}^{N} a_k + \frac{a_{N+1}}{1 - s}$$

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} < s < 1,\ n > N\right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{N} a_k + \lim_{n \to \infty} \sum_{k=N+1}^{n} a_k$$

$$< \sum_{k=1}^{N} a_k + a_{N+1}\{1 + (s + \varepsilon) + (s + \varepsilon)^2 + \cdots\} = \sum_{k=1}^{N} a_k + \frac{a_{N+1}}{1 - (s + \varepsilon)}$$

$$\left(\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = s < 1 \quad \text{ゆえ} \quad s - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < s + \varepsilon < 1,\ n > N\right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{N} a_k + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=N+1}^{n} a_k$$

$$> \sum_{k=1}^{N} a_k + a_{N+1}\{1 + s + s^2 + \cdots\} \text{ ：発散}$$

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} > s > 1,\ n > N\right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{N} a_k + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=N+1}^{n} a_k$$

$$> \sum_{k=1}^{N} a_k + a_{N+1}\{1 + (s-\varepsilon) + (s-\varepsilon)^2 + \cdots\} \text{ ：発散}$$

$$\left(\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = s > 1 \quad \text{ゆえ} \quad 1 < s-\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < s+\varepsilon,\ n > N\right)$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ が存在しない場合には，上記の証明から明らかなように，$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ならば収束し，$\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ ならば単純発散する．

例 3-5　$\sum_{n=1}^{\infty} n^p x^n \ (x > 0)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p x = x$$

ゆえに，$1 > x > 0$ のとき，p の値にかかわらず収束し，$x > 1$ のとき，p の値にかかわらず単純発散する．なお，$x = 1$ のとき $\sum_{n=1}^{\infty} n^p x^n$ は $\sum_{n=1}^{\infty} n^p$ に帰すので，その収束発散は p に依存する（例 2-5, 6 および演習問題 3-8）．■

例 3-6　$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p}{n!}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(1+1/n)^p}{n+1} = 0$$

ゆえに，p の値にかかわらず収束する．■

例 3-7　$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1$$

ゆえに発散する．■

$\sqrt[n]{a_n}$ が簡単な式になる場合には，次の根試験が有効である．

定理 3-8　根試験 (root test) またはコーシー試験　$a_n \geq 0\ (n = 1, 2, \cdots)$ に対して，ある自然数 N より大きいすべての n について，

$$\sqrt[n]{a_n} < s < 1$$

が成立するならば，$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は収束する．特に，

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = s < 1$$

ならば，$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は収束する．

また，

$$\sqrt[n]{a_n} > s > 1$$

が成立するならば，$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は単純発散する．特に，

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = s > 1$$

ならば，$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は単純発散する．

証明)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{N} a_k + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=N+1}^{n} a_k$$

$$< \sum_{k=1}^{N} a_k + s^{N+1}\{1 + s + s^2 + \cdots\} = \sum_{k=1}^{N} a_k + \frac{s^{N+1}}{1-s}$$

$$\left(\sqrt[n]{a_n} < s < 1,\ n > N\right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{N} a_k + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=N+1}^{n} a_k$$

$$< \sum_{k=1}^{N} a_k + (s+\varepsilon)^{N+1}\{1 + (s+\varepsilon) + (s+\varepsilon)^2 + \cdots\} = \sum_{k=1}^{N} a_k + \frac{(s+\varepsilon)^{N+1}}{1-(s+\varepsilon)}$$

$$(\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = s < 1 \quad \text{ゆえ} \quad a_n < (s+\varepsilon)^n < 1,\ n > N)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{N} a_k + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=N+1}^{n} a_k$$

$$> \sum_{k=1}^{N} a_k + s^{N+1}\{1 + s + s^2 + \cdots\} \ :\text{発散}$$

$$\left(\sqrt[n]{a_n} > s > 1 \quad \text{ゆえ} \quad a_n > s^n > 1,\ n > N\right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{N} a_k + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=N+1}^{n} a_k$$

$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n} = s > 1$　ゆえ　$a_n > (s-\varepsilon)^n > 1$　$(n > N)$ である n が無数に存在する．ゆえに，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ でありえない．したがって，$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は発散する．

例 3-8 $\sum_{n=1}^{\infty} \exp(-n^2 x)$

$$\sqrt[n]{a_n} = \exp(-nx)\begin{cases} < \exp(-x) < 1 & (x > 0) \\ > \exp(-x) > 1 & (x < 0) \end{cases}$$

ゆえに，$x > 0$ のとき収束し，$x < 0$ のとき発散する．なお，$x = 0$ で発散することは明らかである．■

例 3-9 $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(\log n)^n}$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{\log n} = 0 < 1$$

ゆえに収束する．■

根試験による判定結果は，比試験による判定結果と一致する．

定理 3-9　$a_n > 0\,(n = 1, 2, \cdots)$ に対して a_{n+1}/a_n がある値に収束するならば，$\sqrt[n]{a_n}$ もその値に収束する．

証明)　$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = t$ と書く．t は 0 でない有限の値であるとする．このとき，

$$\lim_{n\to\infty}(\log a_{n+1} - \log a_n) = \log t$$

ゆえに，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$n > N(\varepsilon)$ のすべての n について，

$$\log t - \varepsilon < \log a_{n+1} - \log a_n < \log t + \varepsilon \tag{3-2-2}$$

を満たす自然数 $N(\varepsilon)$ を定めることができる

式 (3-2-2) において，$n = m, m+1, \cdots, m+l-1$ としたものを加え合わせると

$$l(\log t - \varepsilon) < \log a_{m+l} - \log a_m < l(\log t + \varepsilon)$$

ゆえに，

$$\log t - \varepsilon < \frac{\log a_{m+l} - \log a_m}{l} < \log t + \varepsilon$$

ここで，$l \to \infty$ の極限をとると，

$$\log t - \varepsilon \le \underline{\lim_{l\to\infty}}\,\frac{1}{l}\log a_{m+l} \le \overline{\lim_{l\to\infty}}\,\frac{1}{l}\log a_{m+l} \le \log t + \varepsilon$$

となり，ε は任意に小さくできるので，$\lim_{l\to\infty}(1/l)\log a_{m+l}$ は存在し，$\log t$ に等しい．ゆえに

$$\log t = \lim_{l\to\infty}\frac{1}{l}\log a_{m+l} = \lim_{N\to\infty}\frac{N}{N-m}\frac{1}{N}\log a_N = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log a_N \qquad (N = m+l)$$

これから

$$\lim_{N\to\infty}\sqrt[N]{a_N} = t$$

を得る．ごくわずかな修正を施すことにより，$t = 0$ または ∞ のときにも証明できる．

定理 3-7 比試験あるいは定理 3-8 根試験に現われた定数 s が 1 であるときには，収束・発散の判定を下すことができない．そのとき，次節の詳細判定法が必要になる．

3-3 収束の詳細判定法

簡易判定法(比試験・根試験)による定数 s が 1 であるときに，以下の詳細判定法により収束・発散の判定を行う．

定理 3-10 予備定理 二つの正符号数列 $a_n > 0, b_n > 0\ (n = 1, 2, \cdots)$ に対して，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が単純発散し，$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b_n}\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}}\right) = s$ であるならば，

$s > 0$ のとき，$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は収束し，

$s < 0$ のとき，$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は単純発散する．

証明) まず，$s > 0$ のときには，$n > N$ を満たすすべての n について

$$\frac{1}{b_n}\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} > \frac{s}{2}$$

が成立するように N を定めることができる．このとき，

$$a_{n+1} < \frac{2}{s}\left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right)$$

したがって，

$$\sum_{k=N+1}^{n+1} a_k < \frac{2}{s}\left(\frac{a_N}{b_N} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right) < \frac{2}{s}\frac{a_N}{b_N} \qquad ：有界$$

ゆえに，定理 1-3 により $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は収束する．

次に，$s < 0$ のときには，$n > N$ を満たすすべての n について

$$\frac{1}{b_n}\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} < 0$$

が成立するように N を定めることができる．このとき，

$$a_{n+1} > \frac{a_n}{b_n} b_{n+1}$$

したがって，

$$a_{N+m} > \frac{a_{N+m-1}}{b_{N+m-1}} b_{N+m} > \frac{a_{N+m-2}}{b_{N+m-2}} b_{N+m} > \cdots > \frac{a_N}{b_N} b_{N+m}$$

ゆえに，定理 3-6 により $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は単純発散する．

なお，極限 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b_n}\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}}\right)$ が存在しない場合には，

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b_n}\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}}\right) > 0 \text{ のとき，} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ は収束し，}$$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b_n}\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}}\right) < 0 \text{ のとき，} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ は単純発散する}$$

ことは明らかであろう．

定理 3-11　ラーベ(Raabe)試験　正符号数列 $a_n > 0\ (n = 1, 2, \cdots)$ に対して

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{u}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \qquad n \to \infty$$

であるならば，

$$u > 1 \text{ のとき，} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ は収束し，}$$

$$u < 1 \text{ のとき，} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ は単純発散する．}$$

証明）　仮定により

$$\lim_{n\to\infty}\left\{n\frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)\right\} = u - 1$$

これは，定理 3-10 で，

$$b_n = \frac{1}{n}, \qquad s = u - 1$$

とおいたものに等しい．

例 3-10　$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2 n}$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2 n}\frac{2^{2n+2}((n+1)!)^2(n+1)}{(2n+2)!} = 1 + \frac{3/2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \qquad n \to \infty$$

ゆえに収束する. ■

ラーベ試験によっても, $u = 1$ のときには収束・単純発散の判定ができない. そのとき, 次の定理が試される.

定理 3-12 正符号数列 $a_n > 0\ (n = 1, 2, \cdots)$ が

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{s}{n} + O\left(\frac{1}{n^{t+1}}\right) \qquad (t > 0) \qquad n \to \infty$$

を満たすならば,

$s > 1$ のとき, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は収束し,

$s \leq 1$ のとき, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は単純発散する.

証明) 仮定より

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{s}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

であるから, ラーベ試験により,

$s > 1$ のとき, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は収束し,

$s < 1$ のとき, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は単純発散する.

さて, $s = 1$ のとき,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{O(n^{-t} \log n)}{n \log n} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{o(1)}{n \log n} \qquad (3\text{-}3\text{-}1)$$

である.

ところで,

$$b_n = \frac{1}{n \log n} \qquad (n = 2, 3, \cdots) \qquad \left(\sum_{k=2}^{\infty} b_k \text{ は発散：演習問題 3-1(3) および 3-3}\right)$$

とおくと,

$$\frac{1}{b_n}\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} = \frac{a_n}{a_{n+1}} n \log n - (n+1)\log(n+1) \qquad (3\text{-}3\text{-}2)$$

を得る. したがって, 式 (3-3-2) の右辺を $v_n - 1$ とおくと, 定理 3-10 により,

$v_n > 1$ のとき, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は収束し,

$v_n < 1$ のとき, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は単純発散する.

さて，式 (3-3-2) を書き換えると

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)\log(n+1)}{n\log n} + \frac{v_n - 1}{n\log n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left\{1 + \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}\right\} + \frac{v_n - 1}{n\log n}$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left\{1 + \frac{1}{n\log n} + O\left(\frac{1}{n^2\log n}\right)\right\} + \frac{v_n - 1}{n\log n} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{v_n}{n\log n} + O\left(\frac{1}{n^2\log n}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{n} + \frac{v_n + o(1)}{n\log n} \tag{3-3-3}$$

となる．式 (3-3-1) は式 (3-3-3) で $v_n = 0$ としたものに対応するので，$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ は単純発散する．

例 3-11　$a_n = \dfrac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)\delta(\delta+1)\cdots(\delta+n-1)}$

($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ はいずれも 0 ないし負の整数以外の実数)

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(\gamma+n)(\delta+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)} = 1 + \frac{\gamma+\delta-\alpha-\beta}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad n \to \infty$$

ゆえに

$\gamma+\delta-\alpha-\beta > 1$ のとき，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束し

$\gamma+\delta-\alpha-\beta \le 1$ のとき，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は単純発散する．■

第3章の演習問題

3-1　次の正符号級数の収束・発散を調べよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+\alpha^2}$　(2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^\alpha}$　(3) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^\alpha}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{2n}}$　(5) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$

3-2　正符号級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば，$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ も収束することを証明せよ．

3-3　次式を証明せよ．

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\log k} = \log(\log n) + O(1) \qquad n \to \infty$$

3-4　次式を証明せよ．

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+k}=\log 2$$

3-5　$\log(n!) \sim n(\log n-1),\quad n\to\infty$　(7-5-6) を用いて次式を証明せよ．

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{n-k+1}{k}\sim\log(n!)\qquad n\to\infty$$

3-6　$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=\alpha$ のとき，$\sum_{n=1}^{N}\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{n}\sim\alpha\log N,\ N\to\infty$ を示せ．

3-7　**[比試験では判定できず，根試験で判定できる級数]**

$a_n=2^{-n-(-1)^n}$ の級数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ の収束・発散を判定せよ．

3-8　次の各級数が単純発散することを証明せよ．

(1) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$　$(p\le 1)$

第4章

一般数列とその級数

本章ではもっとも一般的な実数列，すなわち各項が正負の任意の値をとる数列および，その級数を取り扱う．そして，収束級数を絶対収束級数と条件収束級数に分類する．このうち，絶対収束級数は正符号級数とよく似た理解しやすい性質をもつが，条件収束級数は無限級数に特有の一見奇異な性質を有することがわかる．無限個の項を足し合わせるときには，有限個の項を足し合わせる通常の演算規則が必ずしも成り立たないのである．

4-1　絶対収束

数列の各項の絶対値の級数 $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ が収束するとき，もとの級数 $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ は**絶対収束する**(to be absolutely convergent)，という．級数そのものは収束するが，その各項の絶対値の級数 $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ が収束しないとき，級数 $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ は**条件収束する**(to be conditionally convergent)，という．

例 4-1　**絶対収束する級数**

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\cdots=\frac{2}{3}$$

$$|1|+\left|-\frac{1}{2}\right|+\left|\frac{1}{4}\right|+\left|-\frac{1}{8}\right|+\left|\frac{1}{16}\right|+\cdots=2$$

■

例 4-2　**条件収束する級数**

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots=\log 2$$

$$|1|+\left|-\frac{1}{2}\right|+\left|\frac{1}{3}\right|+\left|-\frac{1}{4}\right|+\left|\frac{1}{5}\right|+\cdots \quad \text{：単純発散}$$

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots=\frac{3}{2}\log 2 \quad \text{（順序を変更した級数）}$$

（演習問題 4-3 参照）■

絶対収束は収束に関する非常に強い要件であるゆえ，次の定理が成り立つ．

> **定理 4-1**　数列の各項の絶対値の級数 $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ が収束するならば，もとの級数 $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ そのものも収束する．

証明） 数列 $\{a_k\}$ の各項を正項と負項に分類する．すなわち，

$$a_k^{(+)}=\begin{cases} a_k & (a_k \geq 0) \\ 0 & (a_k < 0) \end{cases} \qquad a_k^{(-)}=\begin{cases} -a_k & (a_k < 0) \\ 0 & (a_k \geq 0) \end{cases}$$

と定義すると，

$$a_k^{(+)} \geq 0, \qquad a_k^{(-)} \geq 0, \qquad a_k=a_k^{(+)}-a_k^{(-)}, \qquad |a_k|=a_k^{(+)}+a_k^{(-)}$$

である．それゆえ，

$$a_k^{(+)} \leq |a_k|, \qquad a_k^{(-)} \leq |a_k|$$

であるから，$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ が収束するので，定理 3-6 により $\sum_{k=1}^{\infty}a_k^{(+)}$，$\sum_{k=1}^{\infty}a_k^{(-)}$ は収束する．ゆえに，定理 2-5 により $\sum_{k=1}^{\infty}a_k=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^{(+)}-a_k^{(-)}\right)$ は収束する．

なお，例 4-1 が示すように，$\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ と $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ は同じ値には収束しない．

絶対収束する級数は，正符号級数とよく似た性質を有する．

> **定理 4-2　項の順序を変更可能**　$\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ が絶対収束するならば，$\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ の項の順序を変更したものを $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ とすると，$\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ も絶対収束し，$\sum_{k=1}^{\infty}a_k=\alpha$ ならば $\sum_{k=1}^{\infty}b_k=\alpha$

証明） 定理 4-1 で行ったのと同じく数列 $\{a_k\}$ の各項を正項と負項に分類し，同様に数列 $\{b_k\}$ の各項も正項と負項に分類する．すなわち，

$$b_k^{(+)}=\begin{cases} b_k & (b_k \geq 0) \\ 0 & (b_k < 0) \end{cases} \qquad b_k^{(-)}=\begin{cases} -b_k & (b_k < 0) \\ 0 & (b_k \geq 0) \end{cases}$$

と定義する．

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ が絶対収束するので，$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(+)}$，$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(-)}$ はともに収束する正符号級数である．そして，$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(+)}$，$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(-)}$ はそれぞれ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(+)}$，$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(-)}$ の項の順序を変更することにより得られるので，定理 3-4 により，

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(+)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(+)}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(-)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(-)}$$

である．したがって，

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(b_k^{(+)} - b_k^{(-)}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^{(+)} - a_k^{(-)}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

である．

すなわち，絶対収束する級数はその項の順序を入れ替えても和は不変である．

例 4-3　**絶対収束する級数とその項の順序を入れ替えた級数**

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{128} + \frac{1}{256} - \frac{1}{512} + \frac{1}{1024} - \cdots = \frac{1}{1-(-1/2)} = \frac{2}{3}$$

$$1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} - \frac{1}{8} + \frac{1}{256} + \frac{1}{1024} - \frac{1}{32} + \cdots + \left(\frac{1}{2^{4n}} + \frac{1}{2^{4n+2}} - \frac{1}{2^{2n+1}}\right) + \cdots$$

$$= \frac{1}{1-1/16} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-1/16} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-1/4} = \frac{2}{3}$$

■

級数が絶対収束するか否かの判定には，第 3 章の正符号数列の収束判定法を援用することができる．

すなわち，$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ に関して，ある自然数 N より大きいすべての n について，

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < s < 1 \qquad \text{特に，} \qquad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = s < 1 \qquad \text{（比試験）}$$

が成立するならば，あるいは，

$$\sqrt[n]{|a_n|} < s < 1 \qquad \text{特に，} \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = s < 1 \qquad \text{（根試験）}$$

が成立するならば，$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ は収束する．すなわち $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は絶対収束する．

そして，

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > s > 1 \qquad \text{特に，} \qquad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = s > 1 \qquad (4\text{-}1\text{-}1)$$

あるいは，

$$\sqrt[n]{|a_n|} > s > 1 \qquad \text{特に，} \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = s > 1 \qquad (4\text{-}1\text{-}2)$$

が成立するならば，$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ は単純発散する．そのとき，式 (4-1-1) あるいは式 (4-1-2) により，$\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ が収束するための必要条件 $\lim_{n\to\infty}a_n = 0$ が満足されないので，$\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ そのものも発散する．

次の 2 例はいずれも比試験（定理 3-7）で収束・発散を判定できる．

例 4-4　$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k^x}$　　$|x| < 1$：絶対収束　■

例 4-5　$\sum_{k=1}^{\infty}(\log x)^k \log\frac{k+1}{k}$　　$\frac{1}{e} < x < e$　：絶対収束

$\frac{1}{e} \leq x < e$　：収束　■

次の定理は，後続のいくつかの定理の証明に用いられる．

定理 4-3　数列 b_n が正符号の単調減少数列であり，数列 a_n が有界であるならば，$\sum_{k=1}^{\infty}a_k(b_k - b_{k+1})$ は絶対収束する．

証明）　$|a_n| \leq K$ とおくと，

$$\sum_{k=1}^{N}|a_k(b_k - b_{k+1})| = \sum_{k=1}^{N}|a_k|(b_k - b_{k+1}) \leq K\sum_{k=1}^{N}(b_k - b_{k+1}) = K(b_1 - b_{N+1}) \leq Kb_1 \quad ：有界$$

ゆえに，$\sum_{k=1}^{\infty}a_k(b_k - b_{k+1})$ は絶対収束する．

例 4-6　$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\tanh k$ は絶対収束する．　■

4-2　条件収束

次の二つの定理は，収束の十分条件を与える．なお，これらを満足する数列は必ずしも絶対収束しない．

定理 4-4　数列 b_n が正符号の単調減少数列であり，級数 $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ が収束するならば，級数 $\sum_{k=1}^{\infty}a_kb_k$ も収束する．

証明）
$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = S_1 b_1 + (S_2 - S_1) b_2 + (S_3 - S_2) b_3 + \cdots + (S_n - S_{n-1}) b_n$$
$$= S_1(b_1 - b_2) + S_2(b_2 - b_3) + \cdots + S_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + S_n b_n, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

ゆえに
$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1}) + S_n b_n$$

級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ が収束するので S_n は有界である．ゆえに，右辺第 1 項の級数は定理 4-3 により収束する．また，数列 b_n が正符号の単調減少数列であるから収束するので，第 2 項も収束する．ゆえに，左辺の級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ も収束する．

例 4-7　$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{\sqrt{\log k}}$ は $-1 < x < 1$ で収束する．■

定理 4-5　数列 b_k が正符号の単調減少数列でその極限が 0 であり，級数 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ が有界であるならば，級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ は収束する．

証明）
$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = S_1 b_1 + (S_2 - S_1) b_2 + (S_3 - S_2) b_3 + \cdots + (S_n - S_{n-1}) b_n$$
$$= S_1(b_1 - b_2) + S_2(b_2 - b_3) + \cdots + S_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + S_n b_n$$

ゆえに
$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1}) + S_n b_n$$

S_n は有界であるから，右辺第 1 項の級数は定理 4-3 により収束する．また，$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ であるから，第 2 項も 0 に収束する．ゆえに，左辺の級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ も収束する．

例 4-8　$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\theta}{k^\alpha}$ $(\alpha > 1)$ は収束する（2 章 例 2-3 参照）．■

定理 4-5 で $a_n = (-1)^{n-1}$ とおくと，よく使われる次の定理を得る．なお，項が交互に符号を替える級数を**交代級数**と呼ぶ．

定理 4-6　数列 b_n が正符号の単調減少数列でその極限が 0 であるならば，交代級数 $b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots$ は収束する．

例 4-9　$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots = \log 2$（5 章 例 5-13 で証明する）■

次の定理も重要である.

定理 4-7　数列 b_n が正符号の単調減少数列であり，級数の部分和 $\sum_{k=m}^{l} a_k$ の ($l = m, m+1, \cdots, n$) における最大値と最小値をそれぞれ $\mathrm{Max}(m,n), \mathrm{Min}(m,n)$ とかくと，

$$b_m \,\mathrm{Min}(m,n) \le \sum_{k=m}^{n} a_k b_k \le b_m \,\mathrm{Max}(m,n)$$

証明） $S(m,l) = \sum_{k=m}^{l} a_k$

と書くと

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n} a_k b_k &= a_m b_m + a_{m+1} b_{m+1} + \cdots + a_n b_n \\ &= S(m,m) b_m + (S(m,m+1) - S(m,m)) b_{m+1} + \cdots + (S(m,n) - S(m,n-1)) b_n \\ &= S(m,m)(b_m - b_{m+1}) + S(m,m+1)(b_{m+1} - b_{m+2}) + \cdots \\ &\quad + S(m,n-1)(b_{n-1} - b_n) + S(m,n) b_n\end{aligned}$$

$b_k - b_{k+1} \ge 0$ ($k = m, m+1, \cdots, n$) であるから，

$$\begin{aligned}&\mathrm{Min}(m,n)(b_m - b_{m+1} + b_{m+1} - b_{m+2} + \cdots - b_n + b_n) \le \sum_{k=m}^{n} a_k b_k \\ &\le \mathrm{Max}(m,n)(b_m - b_{m+1} + b_{m+1} - b_{m+2} + \cdots - b_n + b_n)\end{aligned}$$

ゆえに

$$b_m \,\mathrm{Min}(m,n) \le \sum_{k=m}^{n} a_k b_k \le b_m \,\mathrm{Max}(m,n)$$

次の定理は，条件収束する無限級数が常識を裏切る，という特徴をもっともよく表現している.

定理 4-8　リーマン(Riemann, 1826 - 1866)の定理　条件収束級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は，項の順序を入れ替えることにより，任意の実数に収束させることが可能である.

証明） 定理 4-1 で行ったのと同じく，数列 $\{a_k\}$ の各項を正項と負項に分類する．すなわち，

$$a_k^{(+)} = \begin{cases} a_k & (a_k \ge 0) \\ 0 & (a_k < 0) \end{cases} \qquad a_k^{(-)} = \begin{cases} -a_k & (a_k < 0) \\ 0 & (a_k \ge 0) \end{cases}$$

と定義すると，

$$a_k^{(+)} \geq 0, \qquad a_k^{(-)} \geq 0, \qquad a_k = a_k^{(+)} - a_k^{(-)}, \qquad |a_k| = a_k^{(+)} + a_k^{(-)}$$

である．

さらに，$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ に加えて

$$\widetilde{S}_n \equiv \sum_{k=1}^{n} |a_k|, \qquad S_n^{(+)} \equiv \sum_{k=1}^{n} a_k^{(+)}, \qquad S_n^{(-)} \equiv \sum_{k=1}^{n} a_k^{(-)}$$

を定義すると，

$$S_n^{(+)} = \frac{1}{2}(S_n + \widetilde{S}_n), \qquad S_n^{(-)} = \frac{1}{2}(-S_n + \widetilde{S}_n) \tag{4-2-1}$$

となる．$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ が条件収束級数であるから，S_n は有界であるが $\widetilde{S}_n$ は$+\infty$ に単純発散する．したがって，式 (4-2-1) により $S_n^{(+)}$, $S_n^{(-)}$ はともに $+\infty$ に単純発散する．

以上の準備のもと，条件収束級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ の項の順序を次の手順で置き換えることにより，任意の実数 α に収束する新しい級数 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ をつくることができる．まず，

$$\sum_{k=1}^{n_1} a_k^{(+)} > \alpha$$

を満たす最小の自然数として n_1 を定める．つまり，もとの級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ の正項を順序にしたがって α を超えるまで加えてゆく．その最後の項番号が n_1 である．もし α が負であれば，n_1 は 1 となる．この n_1 により

$$b_k \equiv a_k^{(+)} \qquad (k = 1, 2, \cdots, n_1)$$

を定義する．

次に

$$\sum_{k=1}^{n_1} a_k^{(+)} - \sum_{k=1}^{n_2} a_k^{(-)} < \alpha$$

を満たす最小の自然数として n_2 を定める．つまり，もとの級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ の負項を順序にしたがって α を下回るまで加えてゆく．その最後の項番号が n_2 である．この n_2 により，次の n_2 個の項

$$b_{n_1+k} \equiv -a_k^{(-)} \qquad (k = 1, 2, \cdots, n_2)$$

を定義する．

再び正項にもどり，

$$\sum_{k=1}^{n_1+n_3} a_k^{(+)} - \sum_{k=1}^{n_2} a_k^{(-)} > \alpha$$

を満たす最小の自然数として n_3 を定め，この n_3 により，次の n_3 個の項

$$b_{n_1+n_2+k} \equiv a_{n_1+k}^{(+)} \qquad (k = 1, 2, \cdots, n_3)$$

を定義する．こうしてつくられた級数 $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ は

$$B_{n_1} > \alpha, \qquad B_{n_1+n_2} < \alpha, \qquad B_{n_1+n_2+n_3} > \alpha, \qquad \cdots$$

かつ

$$|B_{n_1} - \alpha| < a_{n_1}^{(+)}, \qquad |B_{n_1+n_2} - \alpha| < a_{n_2}^{(-)}, \qquad |B_{n_1+n_2+n_3} - \alpha| < a_{n_1+n_3}^{(+)}, \qquad \cdots$$

を満たす．

もとの級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は収束するので，

$$\lim_{k\to\infty} a_k^{(+)} = \lim_{k\to\infty} a_k^{(-)} = 0$$

である．したがって，

$$\lim_{k\to\infty} B_k = \alpha$$

である．

上記の証明に適当な修正を施せば，条件収束級数は項の順序を入れ替えることにより単純発散／有界振動／振動発散／させることが可能であることを証明できる．

例 4-10

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \cdots = \log 2$$

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots = \frac{3}{2}\log 2$$

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots = \frac{1}{2}\log 2$$

(演習問題 4-3 参照)　■

第 4 章の演習問題

4-1　次の各級数が収束・絶対収束する x の範囲を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} x^n$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$　　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{nx}\right)^n$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^x}$

4-2　次の級数の収束・発散を調べよ．

$$\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(4n-3)^\alpha} + \frac{1}{(4n-1)^\alpha} - \frac{1}{(2n)^\alpha} + \cdots$$

4-3　[条件収束級数 (I)]

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\cdots=\log 2 \qquad \text{(5 章 例 5-13)}$$

の項の順序を，正の項を m 個，負の項を n 個ずつ交互に並べるように変更すると，新しくできた級数の和は

$$\log 2+\frac{1}{2}\log\frac{m}{n}$$

となることを証明せよ．

4-4　[条件収束級数 (II)]

$$(1-1)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+\cdots=0$$

の項の順序を変更してできる，次の級数の和を求めよ．

(1)　$\left(1+\frac{1}{2}-1\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\right)+\cdots$

(2)　$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-1\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{3}\right)+\cdots$

4-5　$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ が絶対収束するならば，$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ は収束する（逆は成り立たない）ことを示せ．

4-6　$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ が絶対収束するならば，$\sum_{k=1}^{\infty} \log(1+a_k)$ も絶対収束することを示せ．

4-7　$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ が収束するならば，$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k}$ は絶対収束することを示せ．

4-8　次の級数の収束・発散を調べよ．

$$\sum_{k=0}^{N}(-1)^{k-1}\binom{n}{k} \qquad N\to\infty$$

第2部
関数列とその無限級数

第2部の各章では，関数列，すなわち自然数 k と実数 x との2変数関数 $f_k(x)$ $(k = 1,2,3,\cdots)$，およびその無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ を対象とする．第1章で扱ったテイラー級数（ベキ級数）$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ はもっとも基本的な関数列の級数である．

一般に，2変数関数は，1変数関数と比較して内容が格段に豊富かつ複雑になるが，関数列 $f_k(x)$ という観点からは収束の一様性(uniformity)が特に興味ある対象となる．下の表は，一様収束する関数列の級数に可能な操作をまとめたものである．

一様収束する関数列の級数に可能な操作	
・極限操作と無限和を交換する．	定理 5-5
・項別に積分する．	定理 5-7
・(微分した級数が一様収束するとき)項別に微分する．	定理 5-8
[ベキ級数]	
・項別に微分・積分する．	定理 5-12

第5章では関数列とその級数の一般論を展開し，その重要な応用例として，第6章ではフーリエ級数，第7章では漸近級数を解説する．

第5章

一般論

本章では，関数列およびその級数の一般的性質を論じるが，その大半は一様収束に関するものである．一様性(uniformity)は解析学においてきわめて重要な概念である．

微分方程式の解を積分して得られないとき，それをベキ級数(テイラー級数，フロベニウス級数ないし漸近級数)として求めるのが標準的方法であり，さまざまな特殊関数について，そのテイラー級数展開，フロベニウス級数展開および漸近級数展開が存在する[参考文献 11～14]．関数列の無限級数の形で与えられた関数を項別に微分・積分し，またある変数に関する極限操作を項別に(無限和をとる前に)行うことができれば，それらの演算は簡潔に処理することができる．これらの便利な操作を行うことの許される条件が，関数列の無限級数の一様収束性である．

5-1　関数列の一様収束

区間 $a \leq x \leq b$ において，その区間内のすべての点 x に対して，任意の正の数 ε に応じて，$n > N$ であるすべての n について，

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

を満足するように正の整数 N を定めることができるとき，関数列 $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ は，区間 $a \leq x \leq b$ において関数 $f(x)$ に収束する，といい，

$$\lim_{x \to \infty} f_n(x) = f(x)$$

と書く．もちろん，区間は開区間でもかまわない．

一般に，正の整数 $N = N(\varepsilon, x)$ は ε のみならず変数 x にも依存するが，特に，区間 $a \leq x \leq b$ 内のすべての x について $N(\varepsilon, x)$ が変数 x に依存しないとき，すなわち，$N(\varepsilon, x) = N(\varepsilon)$ であるとき，関数列 $f_n(x)$ は関数 $f(x)$ に**一様収束する** (to be uniformly

convergent) という．なお，$N = N(\varepsilon, x)$ が区間 $a \leq x \leq b$ 内のすべての x に関して有界であれば，その上界の一つを $N(\varepsilon)$ とすることができるので，一様収束の定義「$N(\varepsilon, x) = N(\varepsilon)$ である」を「$N(\varepsilon, x)$ が区間 $a \leq x \leq b$ 内で x に関して有界である」と言い換えることもできる．

例 5-1　区間のとり方により一様収束しない関数列 $f_n(x) = x^n$　$(0 \leq x < 1)$　（図 5-1）

関数列 $f_n(x)$ は区間 $0 \leq x < 1$ において $f(x) \equiv 0$ に収束する．

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = 0 \quad (0 \leq x < 1)$$

このとき，

$$|f_n(x) - f(x)| = |x^n| < \varepsilon \tag{5-1-1}$$

であるためには，両辺の対数をとり

$$n \log x < \log \varepsilon$$

でなければならない．これから，$\log x < 0$ に注意すると

$$n > N(\varepsilon, x) = \frac{\log \varepsilon}{\log x}$$

であれば，不等式 (5-1-1) を満たす．しかし，$\varepsilon(> 0)$ の値にかかわらず，

$$\lim_{x\to 1-0} N(\varepsilon, x) = \lim_{x\to 1-0} \frac{\log \varepsilon}{\log x} = +\infty$$

であるから，区間 $0 \leq x < 1$ で $N(\varepsilon, x)$ は有界でない．したがって，点 x に依存しない $N(\varepsilon)$ を定めることができない．つまり，区間 $0 \leq x < 1$ で関数列 $f_n(x) = x^n$ は，関数 $f(x) \equiv 0$ に収束するが，一様には収束しない（一様収束しない）．■

さて，$x = 1$ の近傍を含まない区間 $a \leq x \leq b$ $(0 \leq a < b < 1)$，たとえば，$1/4 \leq x \leq 1/2$ で同じ関数列 $f_n(x) = x^n$ の収束のようすを調べると，当然ながら

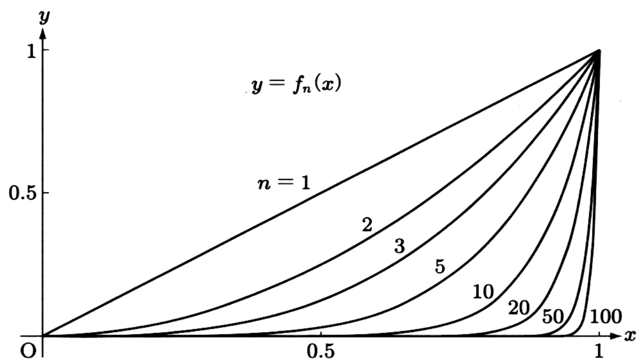


図 5-1　区間のとり方により一様収束しない関数列

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = 0 \qquad \left(\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}\right)$$

すなわち，同じ関数 $f(x) \equiv 0$ に収束し，

$$N(\varepsilon, x) = \frac{\log \varepsilon}{\log x}$$

である．しかし，区間 $1/4 \leq x \leq 1/2$ では $N(\varepsilon, x)$ は有界である．

$$N(\varepsilon, x) = \frac{\log \varepsilon}{\log x} \leq \frac{\log \varepsilon}{\log(1/2)} = -\frac{\log \varepsilon}{\log 2}$$

したがって，x に依存しない

$$N(\varepsilon) = -\frac{\log \varepsilon}{\log 2}$$

を定めることができる．すなわち，$x = 1$ の近傍を含まない区間 $1/4 \leq x \leq 1/2$ では，関数列 $f_n(x) = x^n$ は関数 $f(x) \equiv 0$ に一様収束する．

例 5-2　**1 次関数のフーリエ級数**

図 5-2 は，$f(x) = x\ (0 \leq x \leq 2\pi)$ をフーリエ級数展開した無限級数（例 5-15 参照）

$$x = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \qquad (0 < x < 2\pi)$$

を有限項で打ち切ったものである．この級数は，両端点 $x = 0,\ 2\pi$ の近傍を含む区間では一様収束しない．■

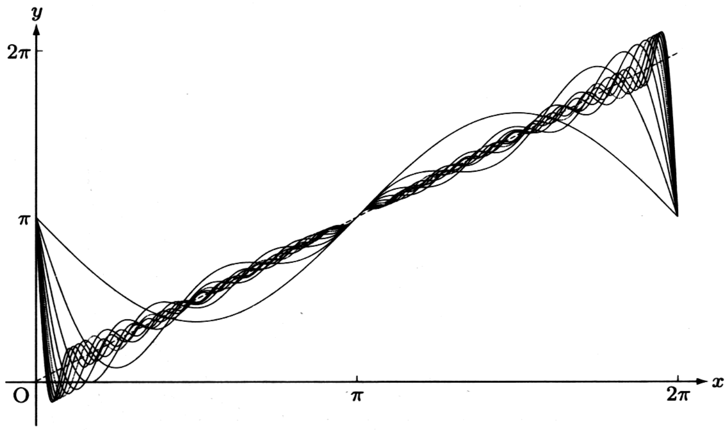


図 5-2　$f(x) = x$ とその有限フーリエ級数

5-2　関数列の級数が一様収束する条件

関数列の級数の収束条件は，一般の級数の収束条件に対応したものとなる．

定理 5-1　区間 $a \leq x \leq b$（開区間でもかまわない）において，関数列の級数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ が一様収束する，すなわち関数列の部分和 $S_n(x) \equiv \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ が一様収束するための必要十分条件は，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$n > N(\varepsilon)$ のすべての n および任意の自然数 m について，

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} f_k(x)\right| < \varepsilon$$

を満たす，x に依存しない自然数 $N(\varepsilon)$ を定めることができることである．

証明）　一様収束の定義および定理 2-1 による．

以下に，一様収束するための十分条件のうち，比較的簡単なものを三つ挙げる．

定理 5-2　ヴァイエルシュトゥラス（Weierstrass, 1815 - 1897）の定理　区間 $a \leq x \leq b$ において，関数列 $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ が

$$|f_n(x)| \leq K_n$$

を満たし，級数 $\sum_{k=1}^{\infty} K_k$ が収束するならば，関数列の級数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ は一様収束する．

証明）　級数 $\sum_{k=1}^{\infty} K_k$ が収束するので，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$n > N$ のすべての n および任意の自然数 m について，

$$K_n + K_{n+1} + K_{n+2} + \cdots + K_{n+m} < \varepsilon$$

を満たす自然数 $N = N(\varepsilon)$ を定めることができる．ゆえに，区間 $a \leq x \leq b$ において，また，この n および m について，

$$|f_n(x) + f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+m}(x)| \leq \sum_{k=n}^{n+m} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n}^{n+m} K_k < \varepsilon$$

となる．したがって，定理 5-1 より，関数列の級数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ は一様収束する．

例 5-3

$\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{x^k}{k^\alpha}$　$(\alpha > 1)$ は，区間 $-1 \leq x \leq 1$ において一様収束する．

なぜならば，同区間において，$\left|\dfrac{x^k}{k^\alpha}\right| \leq \dfrac{1}{k^\alpha}$ $(\alpha > 1)$ であり，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ $(\alpha > 1)$ は収束するからである．■

定理 5-3　区間 $a \leq x \leq b$ において関数列 $g_k(x)$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ が，その区間のすべての x について正の値をとる単調減少数列であり，かつすべての k と x について有界であり，さらに同じ区間において $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ が一様収束するならば，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)g_k(x)$ も一様収束する．

証明)　すべての k と区間 $a \leq x \leq b$ の x について，$g_k(x) < M$ を満たす M が存在する．また，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$n > N$ のすべての n および任意の自然数 m について，

$$|f_n(x) + f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+m}(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$$

を満たす自然数 $N = N(\varepsilon)$ を定めることができる．ゆえに，定理 4-7 より

$$\left|\sum_{k=n}^{n+m} f_k(x)g_k(x)\right| \leq g_n(x) \operatorname*{Max}_{l=0,1,2,\cdots,m} \left|\sum_{k=n}^{n+l} f_k(x)\right| < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

例 5-4

$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}|x|^k}{k}$ は，区間 $-1 \leq x \leq 1$ において一様収束する．

なぜならば，同区間において，$|x|^k$ は正の値をとる単調減少数列であり，かつすべての k と x について有界である．さらに，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ は収束するからである．■

関数列 $g_k(x)$ に定理 5-3 におけるより強い条件を課すと，$f_k(x)$ にはより弱い条件で $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)g_k(x)$ が一様収束する．

定理 5-4　区間 $a \leq x \leq b$ において関数列 $g_k(x)$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ が，その区間のすべての x について正の値をとる単調減少数列であり，かつ $g_k(x)$ が 0 に一様収束し，さらに同じ区間内のすべての x と n について $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| < M$ が成立するならば，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)g_k(x)$ も一様収束する．

証明)　任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$n > N$ のすべての n について，

$$|g_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

を満たす自然数 $N = N(\varepsilon)$ を定めることができる．任意の自然数 m について

$$\left|\sum_{k=n}^{n+m} f_k(x)g_k(x)\right| \le g_n(x) \underset{l=0,1,2,\cdots,m}{\mathrm{Max}} \left|\sum_{k=n}^{n+l} f_k(x)\right|$$

$$\le g_n(x)\left\{\left|\sum_{k=1}^{n-1} f_k(x)\right| + \underset{l=0,1,2,\cdots,m}{\mathrm{Max}} \left|\sum_{k=1}^{n+l} f_k(x)\right|\right\} < \frac{\varepsilon}{2M}(M+M) = \varepsilon$$

例 5-5

$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^\alpha}$ $(\alpha > 0)$ は，$x = 0,\ 2\pi$ の近傍を含まない区間 $a \le x \le b$ $(0 < a < b < 2\pi)$ において一様収束する．

なぜならば，同区間において，$\dfrac{1}{k^\alpha}$ は正の値をとる単調減少数列であり，かつ $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^\alpha} = 0$ である．さらに，$\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \le \dfrac{1}{\sin(x/2)}$ （2-2 節 例 2-3）であるからである． ■

5-3 一様収束する関数列級数の性質

関数列の無限級数は，一様収束する場合に限り有限級数と同様のいくつかの操作が可能になる．本節で一様収束する関数列級数の性質をまとめる．

定理 5-5 極限操作と無限和の交換可能 区間 $a \le x \le b$ において級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ が一様収束するとき，その和を

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

と書く．また，区間内の点 $a \le x_0 \le b$ に近づくときの関数列各項の極限を

$$\lim_{x\to x_0} f_k(x) = f(k, x_0)$$

と書くとき，級数の和の x が x_0 に近づく極限と，関数列各項の x が x_0 に近づく極限をとったものの和は等しい．

$$\lim_{x\to x_0} s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f(k, x_0)$$

すなわち，$x \to x_0$ の極限操作と無限和の操作の順序を交換できる．

証明） $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ が一様収束するので，定理 5-1 により，任意の正の数 ε_1 に対して，$n > N_1(\varepsilon_1)$ のすべての n および任意の自然数 m について

$$-\varepsilon_1 < f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+m}(x) < \varepsilon_1$$

が成立するような $N_1(\varepsilon_1)$ を定めることができる．ここで，$x \to x_0$ の極限をとると，

$$-\varepsilon_1 < f(n+1, x_0) + f(n+2, x_0) + \cdots + f(n+m, x_0) < \varepsilon_1$$

となるゆえ，$\sum_{k=1}^{\infty} f(k, x_0)$ は収束する．

$$\widehat{s}(x_0) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} f(k, x_0)$$

そこで，その第 n 部分和を

$$\widehat{S}_n(x_0) = \sum_{k=1}^{n} f(k, x_0)$$

と，また，$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ の第 n 部分和を

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

と書く．

すると，任意の正の数 ε_2 に対して，$n > N_2(\varepsilon_2)$ のすべての n および任意の自然数 m，さらに定義域内の任意の x, x_0 について

$$\left|\widehat{s}(x_0) - \widehat{S}_n(x_0)\right| < \frac{\varepsilon_2}{3}$$

$$|s(x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon_2}{3}$$

が成立するような $N_2(\varepsilon_2)$ を定めることができる．また，$|x - x_0| < \delta$ を満たす定義域内の任意の x, x_0 について

$$\left|\widehat{S}_n(x_0) - S_n(x)\right| < \frac{\varepsilon_2}{3}$$

が成立する，$\delta(\varepsilon_2)$ を定めることができる．したがって，

$$\left|s(x) - \widehat{s}(x_0)\right| \leq \left|s(x) - S_n(x)\right| + \left|S_n(x) - \widehat{S}_n(x_0)\right| + \left|\widehat{S}_n(x_0) - \widehat{s}(x_0)\right| \leq \varepsilon_2$$

後に，定理 5-13 の例として掲げられている例 5-13, 14 が定理 5-5 の例でもある．

定理 5-6　連続性　区間 $a \leq x \leq b$ において関数列の級数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ が関数 $s(x)$ に一様収束し，区間 $a \leq x \leq b$ 内の点 x_0 において関数 $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ それぞれが連続であるならば，点 x_0 において関数 $s(x)$ は連続である．

証明）　点 x_0 において，関数 $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ それぞれが連続であるから，

$$\lim_{x \to x_0} f_n(x) = f_n(x_0) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

ゆえに，定理 5-5 により

$$\lim_{x \to x_0} s(x) = s(x_0)$$

すなわち，点 x_0 において関数 $s(x)$ は連続である．

定理 5-6 の対偶をとると，「区間 $a \leq x \leq b$ において関数列の級数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ が関数 $s(x)$ に収束するとき，区間 $a \leq x \leq b$ 内の点 x_0 において関数 $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ それぞれが連続であるにもかかわらず，点 x_0 において関数 $s(x)$ が不連続であるならば，区間 $a \leq x \leq b$ 内の点 x_0 を含む部分区間において級数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ は関数 $s(x)$ に一様収束しない」が成立する．第 6 章のフーリエ級数の不連続点におけるギブス現象(6-2 節)が顕著な例である．

例 5-6　**絶対収束するが一様収束しない級数と，一様収束するが絶対収束しない級数**

$$x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^4} + \cdots = \begin{cases} 1 + x^2 & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

は，x のすべての実数値に対して絶対収束するが，$x = 0$ の近傍を含む区間で一様収束せず，収束する関数は $x = 0$ で不連続である．

逆に，

$$\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2+x^2} + \frac{1}{3+x^2} - \frac{1}{4+x^2} \cdots$$

は，定理 5-4 により $\left(f_k(x) = (-1)^k,\ g_k(x) = \dfrac{1}{k+x^2} \right)$，一様収束するが絶対収束しない．

■

定理 5-7　項別積分可能　区間 $a \leq x \leq b$ において関数列 $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ が連続であり，かつ関数列の級数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ が一様収束するとき，関数列の和 $s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ も連続であり，かつその右辺を**項別に積分**することができる．すなわち，

$$\int_a^x s(t)\,dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^x f_k(t)\,dt$$

証明）　任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$n > N$ のすべての n について，

$$|s(x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}, \qquad S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

を満たす自然数 $N = N(\varepsilon)$ を定めることができる．このような n について，

$$\left| \int_a^x s(t)\,dt - \sum_{k=1}^{n} \int_a^x f_k(t)\,dt \right| = \left| \int_a^x \{s(t) - S_n(t)\}\,dt \right| \leq \int_a^x |s(t) - S_n(t)|\,dt < \int_a^x \frac{\varepsilon}{b-a}\,dt \leq \varepsilon$$

例 5-7

級数 $1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$ は，区間 $-1 < -r \leq x \leq r < 1$ において $1/(1+x^2)$ に一様収束する．そこで

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

を項別に積分すると，逆正接関数のテイラー級数展開

$$\tan^{-1} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad (-1 < x < 1)$$

を得る． ■

関数列の級数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ が一様収束することは，それを項別積分することが可能であるための十分条件であり必要十分条件ではないので，一様収束しない関数列の級数の中には項別積分できるものも多種存在する．たとえば，(端点を含む)区間内の1点で不連続である関数に，その不連続点を含まない区間で一様収束する有界な関数列の級数は，項別積分可能である．その一例が次のフーリエ級数である．

例 5-8 (例 5-2, 11, 15 参照)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n} = \begin{cases} \dfrac{\pi - \theta}{2} & (0 < \theta < 2\pi) \\ 0 & (\theta = 0, 2\pi) \end{cases}$$

は $\theta = 0$ または $\theta = 2\pi$ の近傍を含む区間で一様収束しないが，$\theta = 0$ および 2π の近傍を含まない区間では一様収束する(図 5-3)．

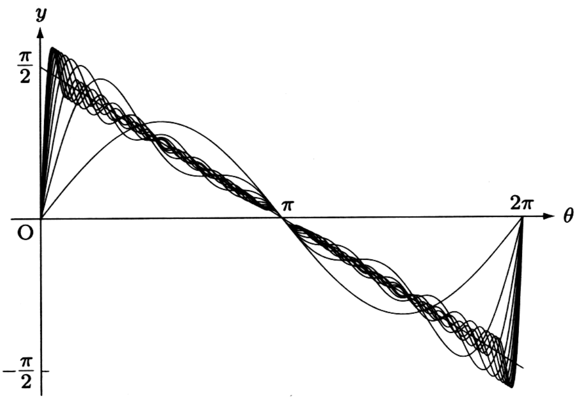


図 5-3　一様収束しないが項別積分できる関数列

したがって，積分の端点で不連続ではあるが，この級数を項別積分したものが収束する関数(1 次関数)の積分と一致することは理解しやすい．実際，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin n\theta}{n}\,d\theta = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2} = 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2} = 2\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{4}$$

$$\int_0^{\pi}\frac{\pi-\theta}{2}d\theta = \frac{\pi^2}{4}$$

である(演習問題 5-5 解答最終行参照)．■

しかし，一様収束しない関数列の級数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ がデルタ関数(δ 関数) †1 的振る舞いをするとき，すなわち，ある点付近で関数の値自体が発散し，その点を含む区間における積分が有界である場合には，項別積分できない．

例 5-9　一様収束しない関数列の級数を項別積分できない場合

関数列の級数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$

$$f_k(x) \equiv g_{k+1}(x) - g_k(x)$$

$$g_k(x) = \begin{cases} k^2 x & \left(0 \leq x \leq \dfrac{1}{k}\right) \\ 2k - k^2 x & \left(\dfrac{1}{k} \leq x \leq \dfrac{2}{k}\right) \\ 0 & \left(\dfrac{2}{k} \leq x\right) \end{cases} \qquad \text{(図 5-4)}$$

を考える．$g_k(x)$ はすべての k について，

$$\int_0^{\infty} g_k(x)\,dx = 1$$

であるが，k が大きくなるにつれて $g_k(x) \neq 0$ の範囲 $(0 < x < 2/k)$ は限りなく小さくなり，一方 $g_k(x)$ の最大値 k は無限に大きくなる．

さて，

---

†1　$\delta(x) \equiv \lim_{k\to\infty} g_k(x)$ をディラック (Dirac) のデルタ (delta) 関数と呼び，以下の性質を有する．

$\delta(x)$ は，$\delta(x) = 0\ (x \neq 0)$ であり，$x = 0$ を含む任意の区間にわたる積分が

$$\int_a^b \delta(x)\,dx = 1$$

である，と定義される超関数 (distribution) である．積分が 1 である鋭いパルスの幅が 0 に近づく極限であり (図 5-4)，定理として次式を得る．

$$\int_a^b f(x)\delta(x)\,dx = f(0)\int_a^b \delta(x)\,dx = f(0)$$

つまり，関数 $f(x)$ に $\delta(x-a)$ をかけて $x = a$ を含む区間で積分すると，$f(a)$ の値を抽出する．

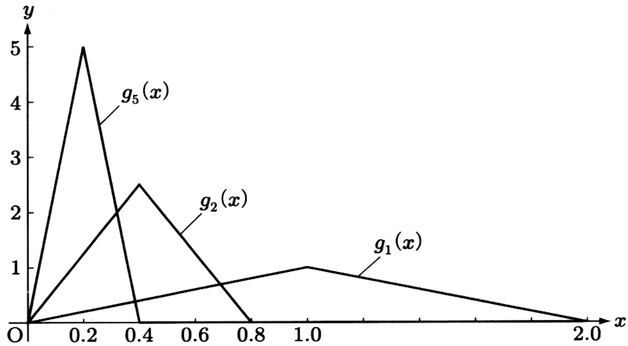


図 5-4 項別積分できない関数列

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = g_{n+1}(x) - g_1(x)$$

であるから,

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \lim_{n\to\infty} S_n = -g_1(x) \qquad (x \neq 0)$$

$$\int_0^2 \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\,dx = -\int_0^2 g_1(x)\,dx = -1$$

である一方,

$$\int_0^2 f_k(x)\,dx = \int_0^2 \{g_{k+1}(x) - g_k(x)\}\,dx = 1 - 1 = 0$$

であるから,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^2 f_k(x)\,dx = 0$$

すなわち,項別積分不可能である. ■

級数そのものではなく,項別微分した級数が一様収束するとき,もとの級数は項別微分可能である.

定理 5-8 項別微分可能 関数列の和 $s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ が収束し,関数列 $f_k(x)$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ が微分可能であり,$df_k(x)/dx$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ が連続であり,かつ

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{df_k(x)}{dx}$$

が一様収束するならば，

$$\frac{ds(x)}{dx} = u(x)$$

が成立する．すなわち，関数列の和 $s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ の右辺を**項別に微分**することができる．

証明） $u(x)$ が一様収束するので，定理 5-7 により，項別積分可能である．

$$\int_a^x u(t)\,dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^x \frac{df_k(x)}{dx} dt = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} f_k(a) = s(x) - s(a)$$

ゆえに，$ds(x)/dx = u(x)$ が成立する．

例 5-10

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \log(1-x) + \log(1+x) + \log(1+x^2) + \log(1+x^4) + \cdots + \log(1+x^{2^{n-2}}) + \cdots$$

であるとき，その第 n 部分和は

$$S_n = \log(1-x) + \log(1+x) + \log(1+x^2) + \log(1+x^4) + \cdots + \log(1+x^{2^{n-2}})$$

$$= \log(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-2}})$$

$$= \log(1-x^{2^{n-1}})$$

であるから，

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \lim_{n\to\infty} S_n = 0 \qquad (-1 < x < 1)$$

である．一方，第 n 部分和 S_n を項別微分した級数

$$\frac{d}{dx}S_n = -\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1+x^2} + \frac{4x^3}{1+x^4} + \cdots + \frac{2^{n-2}x^{2^{n-2}-1}}{1+x^{2^{n-2}}}$$

の第 3 項以降について，

$$\left|\frac{2^{n-2}x^{2^{n-2}-1}}{1+x^{2^{n-2}}}\right| \leq 2^{n-2}r^{2^{n-2}-1}, \quad 0 \leq |x| < r < 1 \qquad (-1 < x < 1)$$

であるから，定理 5-2 により項別微分した級数は一様収束する．ゆえに定理 5-8 が成立し，

$$-\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1+x^2} + \frac{4x^3}{1+x^4} + \cdots + \frac{2^{n-2}x^{2^{n-2}-1}}{1+x^{2^{n-2}}} + \cdots = \frac{d}{dx}s(x) = 0$$

となる．したがって，

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2x}{1+x^2}+\frac{4x^3}{1+x^4}+\cdots+\frac{2^{n-2}x^{2^{n-2}-1}}{1+x^{2^{n-2}}}+\cdots=\frac{1}{1-x}$$

を得る. ■

例 5-11

再び，1次関数のフーリエ級数(例 5-2, 8, 15 参照)を取り扱う.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}=\begin{cases}\dfrac{\pi-\theta}{2} & (0<\theta<2\pi)\\ 0 & (\theta=0,\ 2\pi)\end{cases} \tag{5-3-1}$$

は $\theta=0$ および 2π の近傍を含まない区間で一様収束し(例 5-5)，$\theta=0$ および 2π を含む区間においても項別積分が可能であった(例 5-8). しかし，項別微分した級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{d\theta}\frac{\sin n\theta}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\cos n\theta \quad ：有界振動 \quad (2\text{-}2 節\ 例\ 2\text{-}2)$$

が収束しないので，定理 5-8 の条件は満たされず，式 (5-3-1) 右辺の微分

$$\frac{d}{d\theta}\frac{\pi-\theta}{2}=-\frac{1}{2}$$

と一致しない. ■

5-4　ベキ級数

解析学においてもっとも重要な関数列は，ベキ級数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-c)^n$ である. とりわけ $c=0$ の場合，すなわち $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ が頻繁に登場する. なお，ベキ級数においては，定数項を含めるために初項を $n=0$ とする. 以下では，一般性を失うことなくベキ級数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ を取り扱う.

定理 5-9　予備定理　$x=x_0$ のとき，ベキ級数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ が収束するならば，$|x|<|x_0|$ のすべての x について，ベキ級数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ は絶対かつ一様収束する.

証明)　$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx_0^n$ が収束するので，$n>N$ を満たすすべての n に対して $|a_nx_0^n|<\varepsilon$ とすることができる. また $|x|<|x_0|$ であるから，$0<\theta<1$ を用いて $|x|\le\theta|x_0|$. ゆえに,

$$|a_nx^n|\le|a_nx_0^n|\theta^n<\varepsilon\theta^n$$

したがって，定理 5-2 により，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は絶対かつ一様収束する．

> **定理 5-10**　$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1/R$ とおくと，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は $|x| < R$ のとき絶対収束し，$|x| > R$ のとき発散する．このことは x が複素数であっても成立するので，R を**収束半径**と呼ぶ．

証明）　$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x|/R$ であるから，定理 3-8 より明らか．

数列 $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ が有界であれば $1/R$ は有限確定，すなわち R は有限確定または ∞ であり（第 1 章），発散すれば $R = 0$ である．

例 5-12

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \;:\; R = \infty, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} x^n \;:\; R = 1, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} n!x^n \;:\; R = 0$$ ■

比試験（定理 3-7）より，次の収束半径計算法を得る．

> **定理 5-11**　$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ が存在すれば，$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{R}$ である．

証明）　定理 3-9 と定理 5-10 による．

ベキ級数は，収束するならば自動的に一様収束する．

> **定理 5-12**　$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径が R であるならば，$|x| \le s < R$ のとき $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は一様収束する．

証明）　$|a_n x^n| \le |a_n| s^n$ であるから，定理 5-9 より明らか．

したがって，ベキ級数は積分範囲が $(-R, R)$ に含まれている限り項別積分可能である．すなわち，

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \, dx = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}\right]_a^b$$

これはまた，

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n+1]{\left|\frac{a_n}{n+1}\right|} = \frac{1}{R}$$

であることを意味する．

また，ベキ級数は項別微分可能である．すなわち，

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

これは，

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n-1]{|na_n|} = \frac{1}{R}$$

であることを意味する．

次の定理は，変数が収束円上にあるときのベキ級数の値を得るために有用である．

定理 5-13　アーベル(Abel)の定理　$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径が R であり，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ が収束するならば，

$$\lim_{x\to R}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

証明)　$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ が収束し，$(x/R)^n$ は正で有界な 0 に収束する単調減少数列であるから，定理 5-4 により $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は一様収束する．したがって，定理 5-5 により，和と極限は交換する．

例 5-13　テイラー級数展開(1-9 節)

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots \qquad (|x|<1)$$

の右辺級数は，定理 4-6 により $x=1$ で収束する．ゆえに

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots = \log 2$$

■

例 5-14

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad (|x|<1) \qquad (例 5\text{-}7)$$

の右辺級数は，定理 4-6 により $x=1$ で収束する．ゆえに

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$$

■

例 5-15

$0 < \theta < 2\pi$ のとき,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n} = \frac{\pi - \theta}{2} \tag{5-4-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n} = -\log\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right) \tag{5-4-2}$$

証明) $|x| < 1$ のとき,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}(\cos n\theta + i\sin n\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}e^{in\theta} = e^{i\theta}\sum_{n=1}^{\infty}(xe^{i\theta})^{n-1}$$

$$= \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{1 - x\cos\theta - ix\sin\theta} = \frac{(\cos\theta - x) + i\sin\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2}$$

ゆえに, 両辺の実部, 虚部をそれぞれ比較すると,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}\cos n\theta = \frac{\cos\theta - x}{1 - 2x\cos\theta + x^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}\sin n\theta = \frac{\sin\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2}$$

となる. これら二つの級数は, $0 < \theta < 2\pi$ かつ $0 \leq x < 1$ のとき, 定理 5-4 により一様収束するので, x について項別積分することができ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\cos n\theta = \int_0^x \frac{\cos\theta - t}{1 - 2t\cos\theta + t^2}\,dt = -\frac{1}{2}\log(1 - 2x\cos\theta + x^2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\sin n\theta = \sin\theta\int_0^x \frac{dt}{1 - 2t\cos\theta + t^2} = \left[\tan^{-1}\left(\frac{t - \cos\theta}{\sin\theta}\right)\right]_0^x$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{x - \cos\theta}{\sin\theta}\right) - \tan^{-1}(-\cot\theta)$$

$$= \begin{cases} \tan^{-1}\left(\dfrac{x - \cos\theta}{\sin\theta}\right) + \left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) & (0 < \theta < \pi) \\ \tan^{-1}\left(\dfrac{x - \cos\theta}{\sin\theta}\right) + \left(\dfrac{3\pi}{2} - \theta\right) & (\pi < \theta < 2\pi) \end{cases}$$

となる. さて, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n\theta}{n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos n\theta}{n}$ はそれぞれ収束し (x に関しては一様収束), また $\{x^n\}$ は $0 \leq x \leq 1$ で正の単調減少数列であり, かつ有界である. したがって, 定理 5-3 により $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}\cos n\theta$ および $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}\sin n\theta$ は, $0 \leq x \leq 1$ で一様収束する. ゆえに定理 5-5 により,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n} = -\frac{1}{2}\log(2 - 2\cos\theta) = -\log\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}=\begin{cases}\tan^{-1}\left(\tan\dfrac{\theta}{2}\right)+\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right) & (0<\theta<\pi)\\[2ex] \tan^{-1}\left(\tan\dfrac{\theta}{2}\right)+\left(\dfrac{3\pi}{2}-\theta\right) & (\pi<\theta<2\pi)\end{cases}$$

$$=\frac{1}{2}(\pi-\theta)\qquad(0<\theta<2\pi)$$

を得る. ■

ある関数のベキ級数展開が存在すれば，それはテイラー展開である.

定理 5-14 ベキ級数が収束するとき,

$$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

とおくと，そのベキ級数は $s(x)$ の $x=0$ まわりのテイラー展開(マクローリン展開)

$$a_n=\frac{s^{(n)}(0)}{n!}$$

である.

証明) 定理 5-12 よりベキ級数は項別微分可能であるから,

$$s^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-k+1)a_nx^{n-k}$$

ゆえに

$$s^{(k)}(0)=k!a_k$$

である.

二つのベキ級数が恒等的に等しければ，展開のすべての対応する係数が等しい.

定理 5-15 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ と $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ が $x=0$ を含む区間において恒等的に等しければ，$a_n=b_n$ $(n=1,2,\cdots)$ である.

証明)
$$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

$$t(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$$

とおくと,

$$s(x)\equiv t(x)$$

であり，かつ，定理 5-14 により

$$a_n = \frac{s^{(n)}(0)}{n!}$$

$$b_n = \frac{t^{(n)}(0)}{n!}$$

ゆえ,

$$a_n = b_n \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

5-5 無限級数の収束加速法

関数列の無限級数の代表例は，微小係数εをもつ微分方程式の摂動法による近似解としてのεのベキ級数である[12，第1章]．ところが，摂動法による級数解は，量子力学など多くの場合，はじめの数項は比較的単純な扱いやすい式に表現できるものの，項数nがふえる(摂動近似の次数が上がる)とともに，表式(摂動計算の手続き)が急速に複雑化し，しかも収束が緩慢になる．その結果，最初の数項のみでは厳密解をよく近似する高精度解を得られない†2．

緩慢な収束をみせる無限級数のもっとも簡単な例が

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{N}(-x)^n + R_N$$

である．その第n部分和の残差

$$R_N = \frac{(-x)^{N+1}}{1+x}$$

は，$|x| < 1$のとき$R_N \to 0$であり，たとえば，$x = 0.5$のとき(例5-16，図5-5)にはその収束は速いが，xが1に近くなる(例5-17，図5-6)と，その収束はきわめて緩慢になる．

例5-16 **収束の速い級数** $\sum_{n=0}^{N}(-0.5)^n$ (図5-5) ■

例5-17 **収束の緩慢な級数(1)** $\sum_{n=0}^{N}(-0.9)^n$ (図5-6) ■

†2 一方，特異摂動法の代表的3手法である，境界層理論・WKB法・複スケール解析による漸近級数解においては，初項(主要部)のみあるいは第2項までの和で高精度近似解を得られる場合が一般的である[12]．

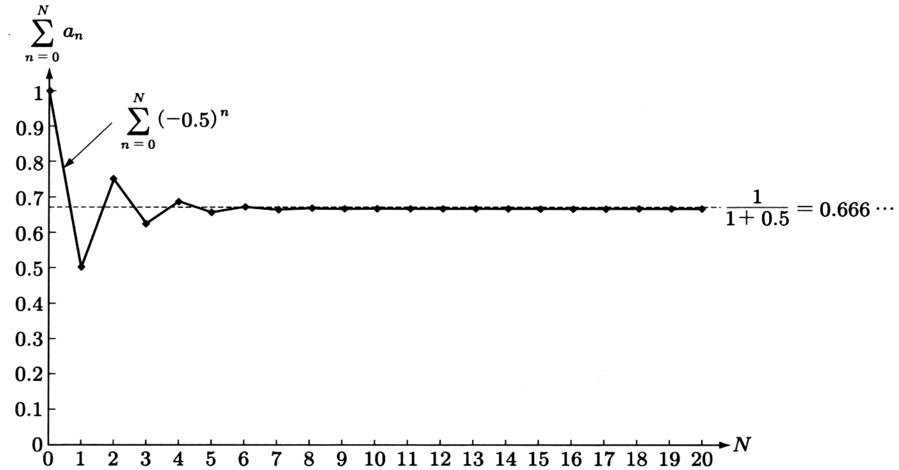


図 5-5　収束の速い級数 $\sum_{n=0}^{N}(-0.5)^n$

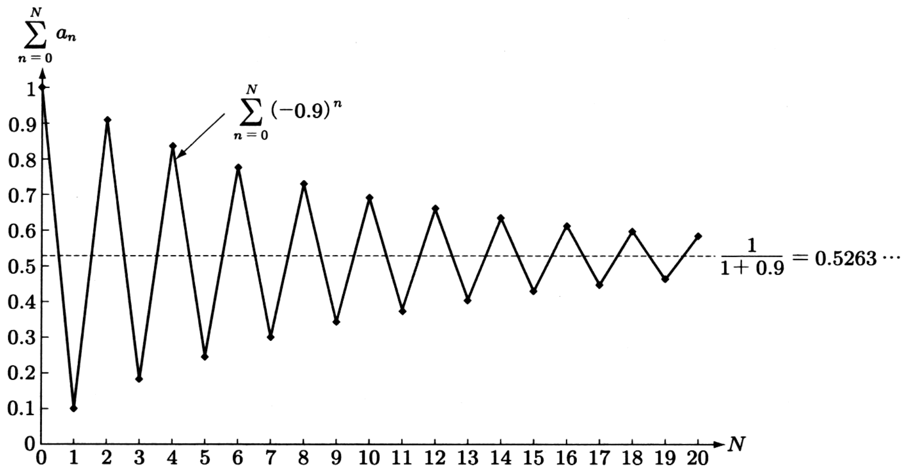


図 5-6　収束の緩慢な級数 (1) $\sum_{n=0}^{N}(-0.9)^n$

このような緩慢な収束は，次のような多数の例にみられる．本節では，収束が緩慢なこれらの無限級数の収束を加速させる方法について解説する[†3]．

例 5-18　収束の緩慢な級数 (2)　log 2　（図 5-7）

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots = \log 2 = 0.693147\cdots \quad ■$$

†3　第1部で取り扱うべき数列の無限級数を対象とするが，本章で各種の関数列を考察したあとに解説することが適当と判断した．

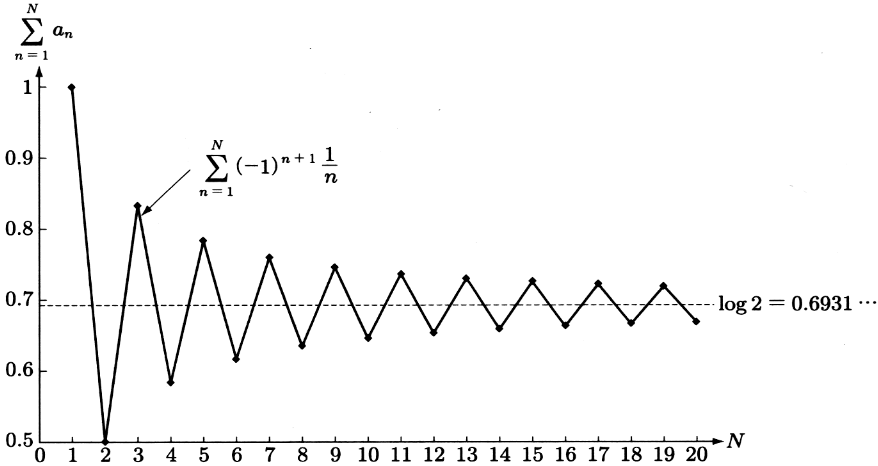


図 5-7　収束の緩慢な級数 (2) $\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}(\to \log 2, N \to \infty)$

例 5-19　**収束の緩慢な級数 (3)　円周率** $\sum_{n=1}^{N}\frac{4(-1)^{n+1}}{2n-1}(\to \pi,\ N \to \infty)$　（図 5-8）

$$4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right)=\pi=3.14159265358979\cdots$$ ■

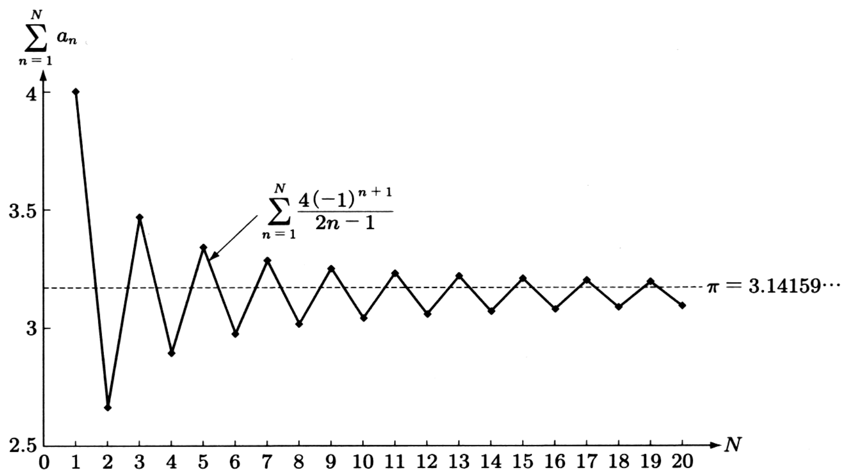


図 5-8　収束の緩慢な級数 (3) 円周率 $\sum_{n=1}^{N}\frac{4(-1)^{n+1}}{2n-1}(\to \pi,\ N \to \infty)$

例 5-20　**収束の緩慢な級数 (4)　リーマンのツェータ関数**　（図 5-9）

$$\zeta(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}=1.644934\cdots$$ ■

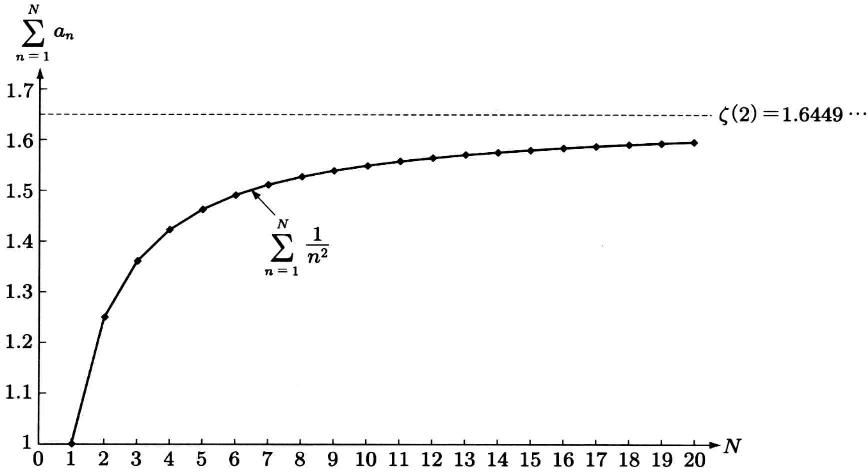


図 5-9　収束の緩慢な級数 (4) ツェータ関数 $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$ $(\to \zeta(2),\ N \to \infty)$

例 5-21　**収束の緩慢な級数 (5)　オイラー定数**　(図 5-10)

$$\log \gamma \equiv \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \log N\right) = \lim_{N\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N} - \log N\right) = 0.57721566\cdots$$

■

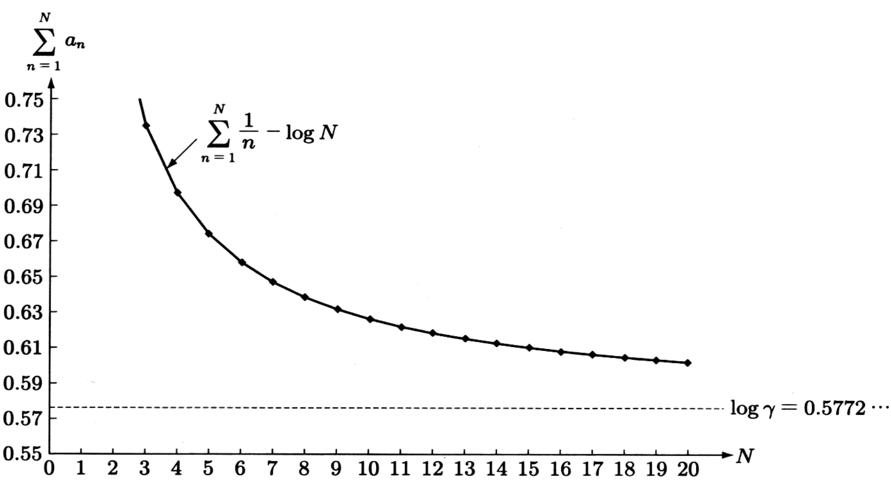


図 5-10　収束の緩慢な級数 (5) オイラー定数 $\log \gamma$

■ 5-5-1 シャンクス変換

上記の収束緩慢な級数のうち，例 5-17〜19 はすべて極限値の上下に振動しつつ収束してゆくが，その振幅が大きいために緩慢な収束になっている．そこで，これらの数列 a_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ の部分和 $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ の振動部分を抽出して

$$S_N = \alpha(N) + A(-r)^N \qquad (N = 1, 2, 3, \cdots) \tag{5-5-1}$$

と近似する．式 (5-5-1) の右辺第 2 項が速く（図において大きく）振動する項で，第 1 項 $\alpha(N)$ は，N の関数として第 2 項に比べてゆっくりと変化する項である．したがって，数列 $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ から $A(-r)^N$ を取り除き $\alpha(N)$ を抽出して，数列 S_n の代わりに数列 $\alpha(N)$ を用いれば，収束は加速されると期待される．

$\alpha(N)$ を求めるためには，式 (5-5-1) の $N = N-1$, N, $N+1$ の 3 式において，N についてゆっくり変化する関数 $\alpha(N)$ が一致する，すなわち

$$\alpha(N-1) = \alpha(N) = \alpha(N+1)$$

と近似すると，3 個の未知数 $\alpha(N), A, r$ の連立方程式

$$S_{N-1} = \alpha(N) + A(-r)^{N-1}$$

$$S_N = \alpha(N) + A(-r)^N$$

$$S_{N+1} = \alpha(N) + A(-r)^{N+1}$$

となる．これから

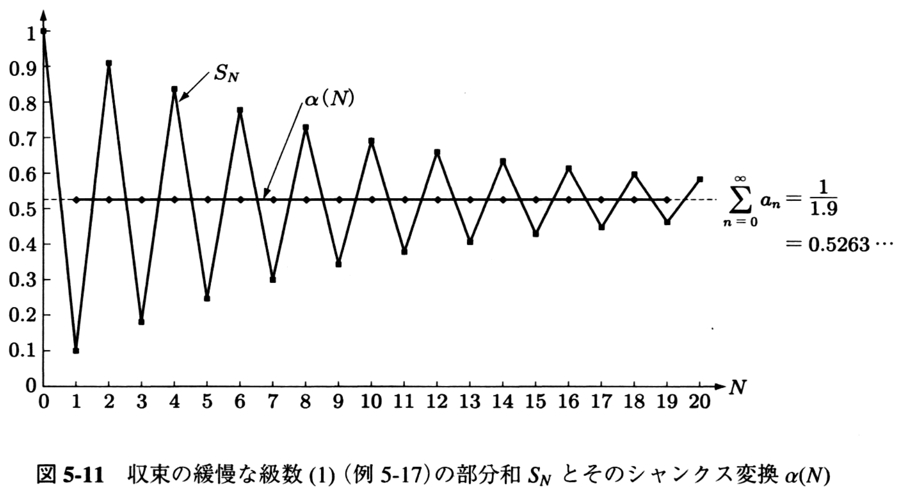


図 5-11 収束の緩慢な級数 (1)（例 5-17）の部分和 S_N とそのシャンクス変換 $\alpha(N)$

$$\alpha(N) = \frac{S_{N-1}S_{N+1} - S_N^2}{S_{N-1} + S_{N+1} - 2S_N} \tag{5-5-2}$$

を得る．式 (5-5-2) による数列 $\{S_N\}$ から $\{\alpha(N)\}$ への非線形変換を**シャンクス変換**（Shanks transformation）と呼ぶ．こうして得られた $\alpha(N)$ は，例 5-17〜19 のいずれに関しても，$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ に比べて著しく収束が速まっている（図 5-11〜13）．特に，例 5-17（図 5-11）では，すべての $\alpha(N) = \alpha$（無限級数の極限：和そのもの）である．つまり，初項 $\alpha(1)$ がすでに極限値を示している．

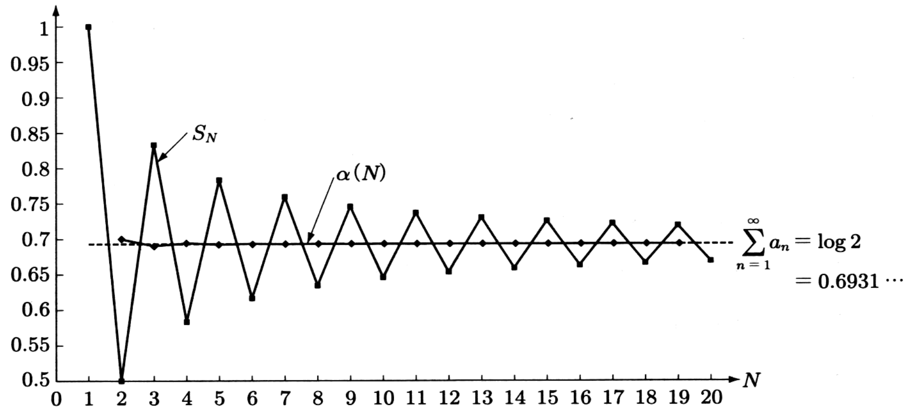


図 5-12　収束の緩慢な級数 (2)（例 5-18）の部分和 S_N とそのシャンクス変換 $\alpha(N)$

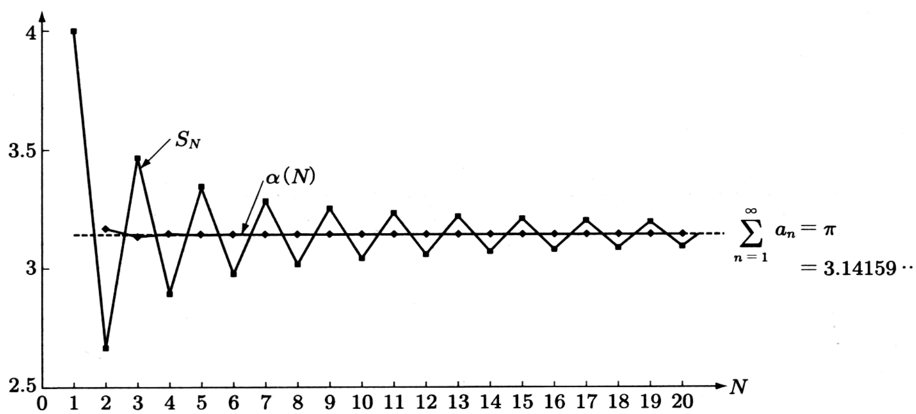


図 5-13　収束の緩慢な級数 (3)（例 5-19）の部分和 S_N とそのシャンクス変換 $\alpha(N)$

■ 5-5-2　リチャードソン外挿法

収束が緩慢な無限級数のうち，例 5-20, 21 は，例 5-17〜19 のように振動しながらゆっくりと収束するのではなく，単調増加(減少)しつつゆっくりと収束する別種の級数であるので，振動項を抽出・除去するシャンクス変換のモデルになじまず，実際に変換を行っても収束は改善しない．

シャンクス変換が有効でない，すなわち振動型でない収束緩慢な級数の収束を加速させる有力な方法が，**リチャードソン外挿法**(Richardson extrapolation)である．この方法は，級数が

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n \sim s_0 + \frac{s_1}{N} + \frac{s_2}{N^2} + \frac{s_3}{N^3} + \cdots \qquad N \to \infty \tag{5-5-3}$$

のときに有効である．なお，この型の振る舞いをすることだけが重要であって，係数 $s_0, s_1, s_2, \cdots$ が判明している必要はない．

式 (5-5-3) の右辺の $1/N$ のベキ級数を m 次までとり，その係数 $s_0, s_1, s_2, \cdots, s_m$ を決定するために $m+1$ 個の連立方程式をたてると，

$$\begin{aligned}
S_N &= s_0 + \frac{s_1}{N} + \frac{s_2}{N^2} + \frac{s_3}{N^3} + \cdots + \frac{s_m}{N^m} \\
S_{N+1} &= s_0 + \frac{s_1}{N+1} + \frac{s_2}{(N+1)^2} + \frac{s_3}{(N+1)^3} + \cdots + \frac{s_m}{(N+1)^m} \\
&\cdots\cdots \\
S_{N+m} &= s_0 + \frac{s_1}{N+m} + \frac{s_2}{(N+m)^2} + \frac{s_3}{(N+m)^3} + \cdots + \frac{s_m}{(N+m)^m}
\end{aligned} \tag{5-5-4}$$

を得る．この $m+1$ 元連立方程式の解のうち s_0 は

$$s_0 = \sum_{n=0}^{m} \frac{S_{N+n}(N+n)^m(-1)^{m+n}}{n!(m-n)!} \tag{5-5-5}$$

である(演習問題 5-9)．こうして推定された s_0 は，もとの数列の項番号と $1/N$ のベキをとる数 m に依存する．

$$s_0 = s_0(N, m)$$

そこで，もとの級数の部分和 $S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$ の代わりに $s_0 = s_0(N, m)$ を用いると，例 5-20, 21 ともに収束はめざましく加速される．図 5-14, 15 に $m = 1, 2$ の計算例を示し，緩慢に収束する S_N と比較する．

$$s_0(N, 1) = (N+1)S_{N+1} - NS_N$$

$$s_0(N, 2) = \frac{(N+2)^2 S_{N+2}}{2} - (N+1)^2 S_{N+1} + \frac{N^2 S_N}{2}$$

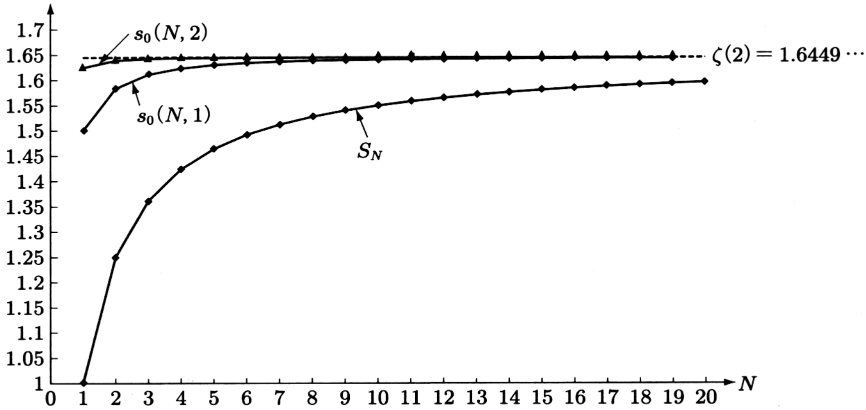


図 5-14　収束の緩慢な級数 (4) (例 5-20) の部分和 S_N とリチャードソン外挿 $s_0(N,m)$ $(m=1,2)$

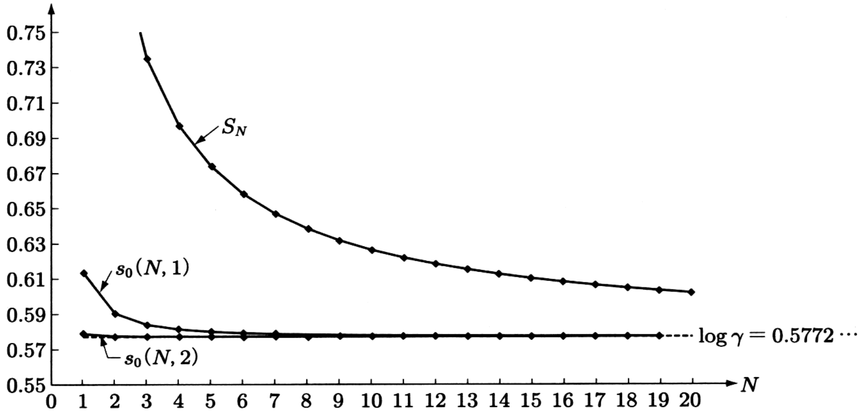


図 5-15　収束の緩慢な級数 (5) (例 5-21) の部分和 S_N とリチャードソン外挿 $s_0(N,m)$ $(m=1,2)$

第 5 章の演習問題

5-1　次の級数の収束・発散を調べよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^n}$　$(x \neq -1)$　　　(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n^{\alpha}}$　$(\alpha > 0)$

5-2　次式を証明せよ．

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin n\theta}{n} = \frac{1}{2}\theta \qquad (-\pi < \theta < \pi) \qquad ①$$

5-3　次式を証明せよ．

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos n\theta}{n} = \log\left(2\cos\frac{1}{2}\theta\right) \qquad (-\pi < \theta < \pi)$$

5-4　次式を証明せよ．

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)\theta}{2k-1} = \begin{cases} \frac{1}{4}\pi & (0 < \theta < \pi) \\ 0 & (\theta = 0, \pi, 2\pi) \\ -\frac{1}{4}\pi & (\pi < \theta < 2\pi) \end{cases}$$

5-5　次式を証明せよ．

リーマンのツェータ関数(Riemann zeta function)

$$\zeta(s) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \quad (\mathrm{Re}\, s > 1)$$

$$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6} \tag{②}$$

5-6　次式を証明せよ．

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos n\theta}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\theta^2}{4} \qquad (-\pi \leq \theta \leq \pi) \tag{③}$$

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n(n+1)} = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}\log\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right) - \frac{\pi-\theta}{2}\sin\theta \qquad (0 < \theta < 2\pi)$$

(3) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n(n+1)} = (\pi-\theta)\sin^2\frac{\theta}{2} - \sin\theta\log\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right) \qquad (0 < \theta < 2\pi)$$

(4) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n\cos n\theta}{n!} = \exp(x\cos\theta)\cos(x\sin\theta) \qquad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

5-7　次の各関数を $x = 0$ のまわりにベキ級数展開したときの収束半径を求めよ．

(1) 指数関数 e^x　(2) $\dfrac{1}{1+x}$　(3) スティルチェス級数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n! x^n$

5-8　[シャンクス変換]

例 5-17 では，すべての

$$\alpha(N) = \frac{S_{N-1}S_{N+1} - S_N^2}{S_{N-1} + S_{N+1} - 2S_N}$$

が N によらず，$\alpha(N) = \alpha$（無限級数の極限：和そのもの）であることを示せ．

5-9　リチャードソン外挿法の公式 (5-5-5)

$$s_0 = \sum_{n=0}^{m}\frac{S_{N+n}(N+n)^m(-1)^{m+n}}{n!(m-n)!}$$

を証明せよ．

第6章

フーリエ級数

テイラー級数は通常点まわりのベキ級数展開という局所解析の産物であるのに対して，フーリエ級数は微分方程式の境界値問題の解である固有関数展開という大域解析に基づく級数である．また，数学の基礎理論においてもっとも重要な級数はテイラー級数であるのと対照的に，応用上もっとも活用されている級数はフーリエ級数である．

高校で学習する物理学の項目で力学・電磁気学についで重要な位置を占めるのが波であるが，波動現象は本質的に位置 $\boldsymbol{r}$（1 次元波では x）と時間 t の多変数関数である．たとえば，弦を伝わる横波は弦の張る方向座標 x と時間 t の 2 変数関数であり，水面を伝わる波は平面座標 (x, y) と時間 t の 3 変数関数である．

以下，1 次元波を考えると，変形しない波の満たす波動方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(x,t) - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,t) = 0 \qquad (c：波速) \tag{6-0-1}$$

の一般解は，x 軸の正負両方向に伝播する進行波の和

$$f(x,t) = f_+(x-ct) + f_-(x+ct)$$

である．

そして，x 軸の正方向に伝播する任意の進行波の波形 $f_+(x-ct)$，すなわち $x-ct$ の任意関数は，正弦関数の和で表される．

$$f_+(x-ct) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(k_n(x-ct)+\theta_n)$$

こう告げられた高校生は，一様に「信じられない」という表情をみせる．しかし，具体的に正弦関数の和が各種関数をよく近似している様子，すなわち図 6-7, 10 などのグラフを確かめると，その目は輝いてくる．

しかも，波動方程式 (6-0-1) は線形であるから[†1]，個々の成分波（フーリエ成分）$\sin k_n(x-ct)$ ごとに演算を施した後に加え合わせることが（一様収束の条件下で）可能である（重ね合わせの原理）．つまり，波動力学は本質的にフーリエ級数（自然数 n と実数 $x-ct$ の関数列）に立脚しており，しかも，個々の成分波 $\sin k_n(x-ct)$ が音波であれば純粋な音程の波，光波であれば純粋な色調の波であるように，単なる数学的表現にとどまらず物理的にも基本的存在である．

本章では，フーリエ級数そのものの理論を説明するのに先立ち，その基礎である，シュトゥルム理論とシュトゥルム-リゥヴィル問題を詳述する[†2]．多くの読者はフーリエ級数の応用面に興味をいだいていることと推察されるが，フーリエ級数の基本的性質を深く理解するために，またフーリエ級数の限界を確認した後それを克服するためにも，固有関数展開の基礎理論である，シュトゥルム理論とシュトゥルム-リゥヴィル問題をよく理解することが重要だからである．ただし，微分方程式論の基礎を未修の読者は 6-1 節を読みとばしてもよい．

6-1　シュトゥルム理論とシュトゥルム-リゥヴィル問題

任意の 2 階線形常微分方程式

$$\frac{d^2}{dx^2}y + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = t(x)$$

は，これに $e^{\int^x p(t)\,dt}$ を乗じることにより，

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int^x p(t)\,dt}\frac{dy}{dx}\right) + e^{\int^x p(t)\,dt}q(x)y = e^{\int^x p(t)\,dt}t(x)$$

と変形することができる．したがって，シュトゥルム方程式

$$\frac{d}{dx}\left(R(x)\frac{dy}{dx}\right) - S(x)y = T(x)$$

は，任意の 2 階線形常微分方程式と等価である．

本章では，シュトゥルム方程式で非斉次項 $T(x)=0$ の場合，すなわち斉次シュトゥルム方程式

$$\frac{d}{dx}\left(R(x)\frac{dy}{dx}\right) - S(x)y = 0 \tag{6-1-1}$$

---

†1　もちろん，すべての波動が線形というわけではなく，式 (6-0-1) より複雑な支配方程式をもつ非線形波動現象が存在する．水の表面波は本質的に非線形波動である［12, 第 7 章］．

†2　シュトゥルム（Sturm，スイス，1803-1855）．リゥヴィル（Liouville，フランス，1809-1882）．6-1-1～4 項の各定理はいずれも「シュトゥルムの」が冠せられるものである．

を考察する．ここに，$R(x), S(x)$ は，閉区間 $a \leq x \leq b$ において実変数 x の連続な実関数である．さらに，同区間において $R(x)$ は零点をもたず（したがって，一般性を失わずに正と仮定する），連続な導関数を有するとする（$R(a) = 0$ または $R(b) = 0$ の場合については，6-1-7 項参照）．このとき，存在と一意性定理［13，5-3 節］により，2 階斉次線形微分方程式 (6-1-1) は初期条件

$$y(x_0) = \alpha, \qquad y'(x_0) = \beta \qquad (a \leq \forall x_0 \leq b)$$

を満たす，連続な導関数を有する唯一の解をもつ．

■ 6-1-1　分離定理

まず，次の予備定理を確認する．

定理 6-1　予備定理　微分方程式 (6-1-1) の $y(x) \equiv 0$ 以外の有意の解は，閉区間 $a \leq x \leq b$ 内に無限個の零点をもつことができない．

証明） もし無限個の零点をもったとすると，必ず零点の集積点 c が存在し，点 c において，

$$y(c) = 0, \qquad y'(c) = 0 \tag{6-1-2}$$

となり，初期条件 (6-1-2) を満たす式 (6-1-1) の解は存在と一意性の定理により，$y(x) \equiv 0$ しか存在しないからである．

定理 6-2　分離定理　$y_1(x)$，$y_2(x)$ を微分方程式 (6-1-1) の二つの独立な解とする．$y_1(x)$ が区間 $a \leq x \leq b$ 内に少なくとも二つの零点を有するとし，そのうち隣り合う二つの零点を X_1, X_2 とすると，もう一方の解 $y_2(x)$ は開区間 $X_1 < x < X_2$ に少なくとも 1 個の零点を有する．

証明） まず，$y_2(x)$ の零点は，$y_1(x)$ の零点 X_1, X_2 のいずれとも一致しないことがわかる．なぜなら，もし一致したとすれば，再び存在と一意性定理により，$y_2(x)$ は $y_1(x)$ の定数倍に等しくなるからである．さて，仮に，解 $y_2(x)$ は開区間 $X_1 < x < X_2$ に零点をもたないと仮定しよう．すると，閉区間 $X_1 \leq x \leq X_2$ において，関数 $y_1(x)/y_2(x)$ は連続な導関数をもち，その区間の両端に零点をもつ．ゆえに，ロールの定理（1-6 節，定理 1-4）により，$y_1(x)/y_2(x)$ は，開区間 $X_1 < x < X_2$ 内の少なくとも 1 点で微係数が 0 となるはずである．ところが，

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\right) = \frac{y_1'(x)y_2(x) - y_1(x)y_2'(x)}{y_2(x)^2}$$

であり，右辺分子は，微分方程式 (6-1-1) の二つの独立な解 $y_1(x), y_2(x)$ のロンスキー行列式［13，第 2 章］であるから，0 にはならない．この矛盾発生の原因は，解 $y_2(x)$ が開区間 $X_1 < x < X_2$ に零

点をもたないと仮定したことにある．したがって，背理法により，解 $y_2(x)$ は開区間 $X_1 < x < X_2$ に少なくとも 1 個の零点を有することが証明された．

なお，$y_2(x)$ は開区間 $X_1 < x < X_2$ に 2 個以上の零点を有することはできない．なぜならば，もし 2 個の零点を有すると仮定すると，今度はその間に $y_1(x)$ の零点が存在することになり，X_1, X_2 を $y_1(x)$ の隣り合う二つの零点としたことに矛盾するからである．

以上をまとめると，2 階斉次線形微分方程式 (6-1-1) の二つの独立な解 $y_1(x), y_2(x)$ の零点は交互にならぶ．したがって，$y_1(x)$ と $y_2(x)$ の零点の個数は等しいか，異なる場合は一つのみである．

■ 6-1-2 基本定理

区間 $a \leq x \leq b$ において定義された連続な実関数 $y_s(x)$ と $y_r(x)$ について，$y_r(x)$ の零点の個数が $y_s(x)$ の零点の個数より多いとき，$y_r(x)$ は $y_s(x)$ **より速く振動する** (to oscillate more rapidly) という．

定理 6-3 基本定理 線形微分方程式 (6-1-1) の解が振動するとき，$R(x)$ および $S(x)$ が小さいほうが，より速く振動する．

証明) $R(x)$ および $S(x)$ の大きいほうの解の隣り合う零点の間に，$R(x)$ および $S(x)$ の小さいほうの解の零点が少なくとも一つ存在することを，背理法により証明する．

$$\frac{d}{dx}\left(R_s(x)\frac{dy_s}{dx}\right) - S_s(x)y_s = 0 \tag{6-1-3}$$

$$\frac{d}{dx}\left(R_r(x)\frac{dy_r}{dx}\right) - S_r(x)y_r = 0 \tag{6-1-4}$$

$$(R_s(x) \geq R_r(x) > 0, \qquad S_s(x) \geq S_r(x))$$

とする．このとき，式 (6-1-3, 4) より

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_s}{y_r}\left(R_s(x)\frac{dy_s}{dx}y_r - R_r(x)y_s\frac{dy_r}{dx}\right)\right)$$
$$= (S_s(x) - S_r(x))y_s^2 + (R_s(x) - R_r(x))\left(\frac{dy_s}{dx}\right)^2 + R_r(x)\left(\frac{dy_s}{dx} - \frac{y_s}{y_r}\frac{dy_r}{dx}\right)^2$$

を得る．いま，仮に，$y_s(x)$ の隣り合う二つの零点を X_1, X_2 とし，$y_r(x)$ が区間 $X_1 \leq x \leq X_2$ において 0 にならないとすると，

$$\left[\frac{y_s}{y_r}\left(R_s(x)\frac{dy_s}{dx}y_r - R_r(x)y_s\frac{dy_r}{dx}\right)\right]_{X_1}^{X_2}$$

$$= \int_{X_1}^{X_2} (S_s(x) - S_r(x)) y_s^2 \, dx + \int_{X_1}^{X_2} (R_s(x) - R_r(x)) \left(\frac{dy_s}{dx} \right)^2 dx + \int_{X_1}^{X_2} R_r(x) \left(\frac{dy_s}{dx} - \frac{y_s}{y_r} \frac{dy_r}{dx} \right)^2 dx \tag{6-1-5}$$

となり，X_1, X_2 は $y_s(x)$ の隣り合う零点であるから，式 (6-1-5) の左辺は 0 であるのに右辺は正となる．この矛盾を生じた原因は，「$y_r(x)$ が区間 $X_1 \le x \le X_2$ において 0 にならない」とした仮定であるゆえ，この仮定が否定される．よって，$y_r(x)$ は $y_r(X_1)y_r(X_2) \neq 0$ のとき，区間 $X_1 < x < X_2$ において少なくとも 1 個の零点を有する．

また，$y_r(X_1)y_r(X_2) = 0$ の場合には式 (6-1-5) の左辺は不定形になるが，たとえば X_1 が $y_r(x)$, $y_s(x)$ の共通の零点であるとすると，コーシーの定理 (1-8 節) により

$$\lim_{x \to X_1} \frac{y_s(x)}{y_r(x)} = \frac{dy_s(x)/dx}{dy_r(x)/dx}$$

となるので，式 (6-1-5) の左辺はやはり

$$\lim_{x \to X_1} \left[\frac{y_s}{y_r} \left(R_1(x) \frac{dy_s}{dx} y_r - R_2(x) y_s \frac{dy_r}{dx} \right) \right] = \left[(R_1(x) - R_2(x))\, y_s \frac{dy_s}{dx} \right]_{x = X_1} = 0$$

となる．ゆえに，いずれの場合にも，区間 $X_1 < x < X_2$ において $y_r(x)$ の零点が少なくとも 1 個存在する．

例 6-1 **ルジャンドル多項式**

ルジャンドル（Legendre, 1752-1833）の微分方程式

$$\frac{d}{dx}\left((1 - x^2) \frac{dy}{dx} \right) + n(n+1) y = 0 \qquad (-1 \le x \le 1) \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{6-1-6}$$

は，斉次シュトゥルム方程式において，$R(x), S(x)$ をそれぞれ

$$R(x) = 1 - x^2$$

$$S(x) = S_n(x) \equiv -n(n+1)$$

とおいたものである．

開区間 $-1 < x < 1$ において $R(x) > 0$ を満たしており（$R(\pm 1) = 0$，6-1-7 項参照），

$$S_n(x) > S_m(x), \qquad n < m$$

であるから，シュトゥルムの基本定理の条件をすべて満たしている．

それゆえ，ルジャンドルの微分方程式の解であるルジャンドル多項式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

の零点の個数は n であり，$S_n(x)$ が小さいほど，すなわち n が大きいほど，零点がふえる．すなわち，より速く振動する（図 6-1）．■

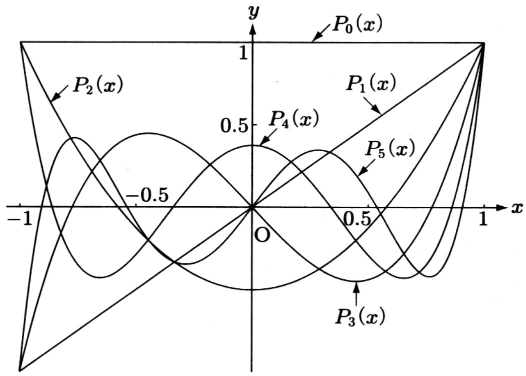


図 6-1　ルジャンドル多項式 ($P_n(x)$, $n = 0 \sim 5$)

■ [振動型の解を有する条件]

$$\frac{d}{dx}\left(R(x)\frac{dy}{dx}\right) - S(x)y = 0 \qquad \text{(6-1-1 再掲)}$$

において，係数関数 $R(x), S(x)$ は閉区間 $a \leq x \leq b$ において，連続で有界であるとする．$R(x), S(x)$ の上限をそれぞれ $R_{\max}, S_{\max}$，下限をそれぞれ $R_{\min}, S_{\min}$ と書くと，

$$R_{\max} \geq R(x) \geq R_{\min} > 0$$

$$S_{\max} \geq S(x) \geq S_{\min}$$

であるが，まず，基本定理 6-3 により，式 (6-1-1) のいずれの解も

$$\frac{d}{dx}\left(R_{\min}\frac{dy}{dx}\right) - S_{\min}y = 0$$

すなわち，

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{S_{\min}}{R_{\min}}y = 0 \qquad \text{(6-1-7)}$$

の解より速く振動しない．ところで，式 (6-1-7) の解は，

i) $S_{\min} > 0$ ならば，非振動型である．

$$y = A\exp\left(\pm\sqrt{\frac{S_{\min}}{R_{\min}}}\right)$$

ii) $S_{\min} = 0$ の場合も非振動型である．

$$y = Ax + B$$

iii) $S_{\min} < 0$ ならば，振動型である．

$$y = A\sin\left(\sqrt{-\frac{S_{\min}}{R_{\min}}}x + B\right) \tag{6-1-8}$$

ただし，この場合，

$$\pi > \sqrt{-\frac{S_{\min}}{R_{\min}}}(b-a)$$

であれば，閉区間 $a \leq x \leq b$ において解 (6-1-8) の零点はたかだか 1 個である．このとき「解は非振動型である」という．

したがって，

$$-\frac{S_{\min}}{R_{\min}} < \frac{\pi^2}{(b-a)^2}$$

ならば，式 (6-1-1) は振動型の解をもたない．

まったく同様にして，

$$-\frac{S_{\max}}{R_{\max}} \geq \frac{(m\pi)^2}{(b-a)^2}$$

ならば，式 (6-1-1) は閉区間 $a \leq x \leq b$ において少なくとも m 個の零点を有する．特に，

$$-\frac{S_{\max}}{R_{\max}} \geq \frac{\pi^2}{(b-a)^2}$$

ならば，式 (6-1-1) は少なくとも 1 個の零点を有する．

■ 6-1-3　比較定理

区間 $a \leq x \leq b$ において，微分方程式

$$\frac{d}{dx}\left(R_s(x)\frac{dy}{dx}\right) - S_s(x)y = 0 \tag{6-1-3 再掲}$$

および初期条件

$$y(a) = \alpha_s, \qquad y'(a) = \beta_s$$

を満たす解を $y_s(x)$ とする．また，同区間において微分方程式

$$\frac{d}{dx}\left(R_r(x)\frac{dy}{dx}\right) - S_r(x)y = 0 \tag{6-1-4 再掲}$$

および初期条件

$$y(a) = \alpha_r, \qquad y'(a) = \beta_r$$

を満たす解を $y_r(x)$ とする．

[比較定理](I)

二つの解 $y_s(x), y_r(x)$ の零点の個数と分布を比較するのが，次のシュトゥルムの比較定理(I)である．

定理 6-4 比較定理(I) 以下の四つの条件

i) 区間 $a \leq x \leq b$ 内の任意の x について，$R_s(x) \geq R_r(x) > 0,\ S_s(x) \geq S_r(x)$

ii) α_s, β_s および α_r, β_r は同時に 0 にならない．

iii) $\alpha_s \neq 0$ のとき，$\alpha_r \neq 0$ であり，かつ

$$\frac{R_s(a)\beta_s}{\alpha_s} \geq \frac{R_r(a)\beta_r}{\alpha_r}$$

iv) 区間 $a \leq x \leq b$ 内の 0 でない長さをもついかなる部分区間においても，$S_s(x) \equiv S_r(x) \equiv 0$ とはならない．

が成立するとき，区間 $a < x \leq b$ において解 $y_s(x)$ が m 個の零点を有するならば，同区間において解 $y_r(x)$ は少なくとも m 個の零点を有する．さらに，$y_r(x)$ の k 番目の零点は $y_s(x)$ の k 番目の零点より小さい．

証明) $y_s(x)$ の m 個の零点を

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_m \leq b$$

とすると，シュトゥルムの基本定理によれば，各区間 $x_k < x < x_{k+1} (k = 1, 2, \cdots, m-1)$ に，$y_r(x)$ の零点が少なくとも 1 個存在する．ゆえに，区間 $a < x < x_1$ 内に $y_r(x)$ の零点が少なくとも 1 個存在することが示されればシュトゥルムの比較定理(I)は証明される．

もし，$y_s(a) = \alpha_s = 0$ であれば，区間 $a < x < x_1$ 内に $y_r(x)$ の零点が少なくとも 1 個存在する．そこで，以下では $y_s(a) = \alpha_s \neq 0$（したがって，$y_r(a) = \alpha_r \neq 0$）の場合を考える．もし，区間 $a < x < x_1$ 内に $y_r(x)$ の零点が存在しないと仮定すると，式 (6-1-5) を区間 $a < x < x_1$ にあてはめたもの

$$\left[y_s^2\left(\frac{R_s(x)}{y_s}\frac{dy_s}{dx} - \frac{R_r(x)}{y_r}\frac{dy_r}{dx}\right)\right]_a^{x_1}$$
$$= \int_{a_1}^{x_1}(S_s(x) - S_r(x))y_s^2\,dx + \int_{a_1}^{x_1}(R_s(x) - R_r(x))\frac{dy_s}{dx}^2\,dx + \int_a^{x_1} R_r(x)\left(\frac{dy_s}{dx} - \frac{y_s}{y_r}\frac{dy_r}{dx}\right)^2 dx \tag{6-1-9}$$

が成立する．式 (6-1-9) の右辺は，条件 i) により正である．一方左辺

$$-y_s^2(a)\left(\frac{R_s(a)}{y_s(a)}\frac{dy_s(a)}{dx} - \frac{R_r(a)}{y_r(a)}\frac{dy_r(a)}{dx}\right) = -\alpha_s^2\left(R_s(a)\frac{\beta_s}{\alpha_s} - R_r(a)\frac{\beta_r}{\alpha_r}\right)$$

は，条件 iii) により負ないし 0 である．この矛盾発生の原因は，区間 $a < x < x_1$ 内に $y_r(x)$ の零

点が存在しないと仮定したことにあるので，背理法により，区間 $a < x < x_1$ 内に $y_r(x)$ の零点が少なくとも 1 個存在することが証明された．

シュトゥルムの比較定理(Ⅰ)から，次のことがわかる．

区間 $a \leq x \leq b$ において，微分方程式

$$\frac{d}{dx}\left(R(x)\frac{dy}{dx}\right) - S(x)y = 0 \qquad \text{(6-1-1 再掲)}$$

および初期条件

$$y(a) = \alpha, \qquad y'(a) = \beta$$

を満たす解 $y(x)$ の m 個の零点が同区間に分布しているとき，初期条件を変えずに $R(x)$ および $S(x)$ を連続的に小さくしてゆくと，すべての零点は左方向(b から a に向かう方向)に移動する．そしてあるとき，新しい零点が右端 $(x = b)$ に現れ，左方向に移動してゆく．

例 6-2　**余弦関数**

微分方程式

$$\frac{d^2}{dx^2}y + n^2 y = 0 \qquad (0 \leq x \leq 2\pi) \qquad \text{(6-1-10)}$$

は，斉次シュトゥルム方程式において，$R(x), S(x)$ をそれぞれ

$$R(x) = 1$$

$$S(x) = S_n(x) \equiv -n^2$$

とおいたものである．

区間 $0 \leq x \leq 2\pi$ において $R(x) > 0$ を満たしており，

$$S_s(x) > S_r(x), \qquad s < r$$

であるから，初期条件を共通にすると，

$$y_s(0) = y_r(0) = 1, \qquad y_s'(0) = y_r'(0) = 0$$

となり，シュトゥルムの比較定理(Ⅰ)の条件ⅰ)～iv)をすべて満たしている．それゆえ，上の初期条件を満たす微分方程式 (6-1-10) の解

$$y = \cos nx$$

の零点は，初期条件を変えずに $S(x) = S_n(x) \equiv -n^2$ を連続的に小さくしてゆくと(n を連続的に大きくしてゆくと)，すべて左方向(2π から 0 に向かう方向)に移動する．そしてあるとき，新しい零点が右端($x = 2\pi$)に現れ，左方向に移動してゆく(図 6-2)．■

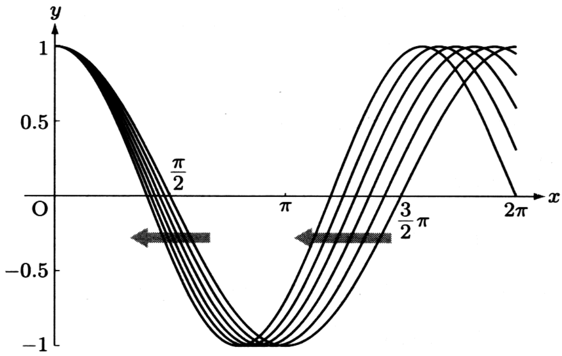


図 6-2　余弦関数の零点の移動

■ [比較定理(Ⅱ)]

点 c を区間 $a \le x \le b$ の内点であるが，$y_s(x)$ ないし $y_r(x)$ のいずれの零点にも一致しない点とすると，比較定理(Ⅰ)により，開区間 $a < x < c$ に存在する $y_r(x)$ の零点の個数は，$y_s(x)$ の零点の個数に等しいかそれより大きい．そこで次の定理が成り立つ．

> **定理 6-5　比較定理(Ⅱ)**　比較定理(Ⅰ)の条件 i)〜iv)が満たされ，かつ開区間 $a < x < c$ に存在する $y_r(x)$ の零点の個数が，$y_s(x)$ の零点の個数に等しいならば，
>
> $$\frac{R_s(c)}{y_s(c)}\frac{dy_s(c)}{dx} > \frac{R_r(c)}{y_r(c)}\frac{dy_r(c)}{dx} \tag{6-1-11}$$
>
> である．

証明)　開区間 $a < x < c$ に存在する $y_r(x)$ と $y_s(x)$ の零点の個数が等しいのであるから，開区間 $a < x < c$ 内で c にもっとも近い零点 x_k は，$y_s(x)$ の零点である．そこで，式 (6-1-5) を区間 $x_k \le x \le c$ にあてはめると，

$$\left[y_s^2(x)\left(\frac{R_s(x)}{y_s(x)}\frac{dy_s(x)}{dx} - \frac{R_r(x)}{y_r(x)}\frac{dy_r(x)}{dx}\right)\right]_{x_k}^{c} > 0$$

となり，これからただちに不等式 (6-1-11) を得る．開区間 $a < x < c$ 内に零点が存在しない場合には，式 (6-1-5) を区間 $a < x < c$ にあてはめ，条件iii)を用いればよい．

したがって，区間 $a \le x \le b$ における初期値問題

$$\frac{d}{dx}\left(R(x)\frac{dy}{dx}\right) - S(x)y = 0 \tag{6-1-1 再掲}$$

$$y(a) = \alpha_a, \qquad y'(a) = \beta_a$$

において，$R(x)$ および(ないし) $S(x)$ が減少すると，開区間 $a < x < c$ 内の $y(x)$ の零点

を除くすべての点において，$\dfrac{R(x)}{y(x)}\dfrac{dy(x)}{dx}$ の値は減少し，最終的に（$-\infty$ になったとき）その点は零点となる．

また，区間 $a \le x \le b$ における初期値問題

$$\frac{d}{dx}\left(R(x)\frac{dy}{dx}\right) - S(x)y = 0 \tag{6-1-12}$$

$$y(a) = k\alpha_a, \qquad y'(a) = k\beta_a$$

の解は，式 (6-1-1) の解 $y(x)$ を用いて，$ky(x)$ と表すことができる．さらに，k が任意であることに注意すると，初期値問題 (6-1-12) は

$$\frac{d}{dx}\left(R(x)\frac{dy}{dx}\right) - S(x)y = 0$$

$$\beta_a y(a) - \alpha_a y'(a) = 0$$

となる．すなわち，斉次初期値問題と同値である．

■ 6-1-4　振動定理

本項では，区間 $a \le x \le b$ における斉次境界条件をもつ境界値問題，すなわち**シュトゥルム問題**

$$\frac{d}{dx}\left(R(x,\lambda)\frac{dy}{dx}\right) - S(x,\lambda)y = 0 \tag{6-1-1'}$$

$$\beta_a y(a,\lambda) - \alpha_a y'(a,\lambda) = 0 \tag{6-1-13}$$

$$\beta_b y(b,\lambda) + \alpha_b y'(b,\lambda) = 0 \tag{6-1-14}$$

を考察する．ここに，$R(x,\lambda)$ および $S(x,\lambda)$ は，x ならびにパラメータ λ の連続関数とする．また，$R(x,\lambda)$ は x に関する連続な導関数をもち，$R(x,\lambda) > 0$ とする．さらに，境界条件に現れる係数もパラメータ λ の連続関数とする（$\lambda_{\min} \le \lambda \le \lambda_{\max}$）．

この場合，

a)　どのような λ の値のとき，解が存在するか？

b)　解が存在する場合，その零点は何個か？

が当面の問題となる．

■ ［振動定理（Ⅰ）］

微分方程式 (6-1-1′) と境界条件 (6-1-13) を満たす独立な解

$$y = y(x,\lambda)$$

は(全体にかかる定数を除き)唯一つしかない．この解が，残る境界条件 (6-1-14) を満たすための条件式

$$F(\lambda) \equiv \beta_b y(b,\lambda) + \alpha_b y'(b,\lambda) = 0$$

が，パラメータ λ を決定する**固有値方程式(特性方程式)**となる．そこで，次の定理が成り立つ．

定理 6-6　振動定理(Ⅰ)　微分方程式 (6-1-1′) の境界条件 (6-1-13, 14) を満たす解は，

i) $R(x,\lambda)$ および $S(x,\lambda)$ はパラメータ λ の単調減少(非増加)関数($\lambda_{\min} \le \lambda \le \lambda_{\max}$)とし，また，区間 $a \le x \le b$ 内の 0 でない長さをもついかなる部分区間においても $S(x,\lambda) \equiv 0$ とはならない．

ii) $R(x,\lambda), S(x,\lambda)$ それぞれの上限 $R_{\max}(\lambda), S_{\max}(\lambda)$ および下限 $R_{\min}(\lambda), S_{\min}(\lambda)$ は，λ の連続な単調減少関数($\lambda_{\min} \le \lambda \le \lambda_{\max}$)である．

iii) $$-\frac{S_{\max}(\lambda)}{R_{\max}(\lambda)} \to +\infty, \qquad \lambda \to \lambda_{\max} \tag{6-1-15}$$

iv) 係数 α_a, β_a および α_b, β_b が λ の関数である場合には，

$$\frac{R(a,\lambda)\beta_a(\lambda)}{\alpha_a(\lambda)} \quad \text{および} \quad \frac{R(b,\lambda)\beta_b(\lambda)}{\alpha_b(\lambda)}$$

は λ の単調減少関数である．

の条件下で**無限個の実固有値** $\{\lambda_m \mid m = k, k+1, \cdots\}$ をもち，この無限数列は $\lambda_{\max}$ に収束する．それぞれの λ_m に対応して，開区間 $a < x < b$ 内に m 個の零点を有する解が唯一つ存在する．

証明) 6-1-2 項[振動型の解を有する条件]の結果によれば，固有値 λ のうち，条件

$$-\frac{S_{\max}(\lambda)}{R_{\max}(\lambda)} \ge \frac{(m\pi)^2}{(b-a)^2}$$

を満たす λ をもち，境界条件 (6-1-13) を満足する微分方程式 (6-1-1′) の解は，区間 $a \le x \le b$ 内に少なくとも m 個の零点をもつ．そして，条件iii)から，λ を $\lambda_{\max}$ に近づけることにより，任意に大きな個数の零点をもつ解を得る．

いま，λ が $\lambda_{\min}$ 近傍のある値(このとき解は開区間 $a < x < b$ 内に k 個の零点をもち，端点は零点でないとする)から連続的に大きくなると，解の零点の個数は増加し，それぞれの零点は区間 $a \le x \le b$ 内を a 方向に移動する．特に，λ のある値 γ_k において新しい零点が $x = b$ に現れ，a 方向に移動する．ついで，またある値 γ_{k+1} において新しい零点が $x = b$ に現れる．こうして，条件iii)により，$\lambda_{\max}$ に収束する無限数列

$\gamma_k, \gamma_{k+1}, \gamma_{k+2}, \gamma_{k+3}, \cdots$

が形成される．そして，区間 $\gamma_{m-1} < \lambda < \gamma_m$ 内の λ に対して唯一の解が存在し，その解は区間 $a < x < b$ 内に m 個の零点を有し，$x = a$ における境界条件 (6-1-13) を満足する．

さらに，比較定理(Ⅱ)により，λ の単調減少関数である式

$$\frac{R(b,\lambda)}{y(b)}\frac{dy(b,\lambda)}{dx}$$

は，λ が γ_m から γ_{m+1} まで変化する間に $+\infty$ から $-\infty$ まで変化する．なぜなら，$\lambda = \gamma_{m-1}$ および $\lambda = \gamma_m$ のとき，$y(b,\lambda) = 0$, $\dfrac{dy(b,\lambda)}{dx} \neq 0$ だからである(例：図 6-2)．

ここで，第二の $x = b$ における境界条件

$$\beta_b(\lambda)y(b,\lambda) + \alpha_b(\lambda)y'(b,\lambda) = 0 \qquad \text{(6-1-14 再掲)}$$

を課す．

さて，λ が γ_{m-1} から γ_m まで変化する間に，$\dfrac{R(b,\lambda)}{y(b)}\dfrac{dy(b,\lambda)}{dx}$ は $+\infty$ から $-\infty$ まで単調減少し，$-\dfrac{R(b,\lambda)\beta_b(\lambda)}{\alpha_b(\lambda)}$ は単調増加する．したがって，区間 $\gamma_{m-1} < \lambda < \gamma_m$ 内に，

$$\frac{R(b,\lambda)}{y(b)}\frac{dy(b,\lambda)}{dx} = -\frac{R(b,\lambda)\beta_b(\lambda)}{\alpha_b(\lambda)}$$

となる，すなわち境界条件 (6-1-14) を満たす，唯一の λ の値が存在する．この λ に対応する解は，同時に境界条件 (6-1-13) をも満たし，開区間 $a < x < b$ 内に m 個の零点を有する微分方程式 (6-1-1′) の解である．こうして定理は証明された．

■ [振動定理(Ⅱ)]

さらに一つの条件を追加すると，振動定理(Ⅰ)における k が 0 となる．

定理 6-7　振動定理(Ⅱ)　振動定理(Ⅰ)の条件 i)〜iv)に加えて次の条件

v)　$$-\frac{S_{\min}(\lambda)}{R_{\min}(\lambda)} \to -\infty, \qquad \lambda \to \lambda_{\min} \qquad \text{(6-1-16)}$$

のもとで，微分方程式 (6-1-1′) の境界条件 (6-1-13, 14) を満たす解には，無限個の実数固有値が存在し，それらを小さい順に

$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_m, \cdots$

とならべ，それぞれの固有値に対応する解(固有関数)を

$Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, \cdots, Y_m, \cdots$

と書くと，解 Y_m は区間 $a < x < b$ 内に m 個の零点を有する．

証明） $R_{\min}(\lambda) > 0$ であるから，条件 v）は，$\lambda_{\min}$ の近傍で $S_{\min}(\lambda) > 0$ を意味する．そこで，微分方程式

$$\frac{d}{dx}\left(R_{\min}(\lambda)\frac{dy}{dx}\right) - S_{\min}(\lambda)y = 0 \tag{6-1-17}$$

の解を調べると，微分方程式 (6-1-17) は，$\lambda_{\min}$ の近傍で，

$$\frac{d^2y_c}{dx^2} - \sigma^2 y_c = 0, \qquad \sigma^2 \equiv \frac{S_{\min}(\lambda)}{R_{\min}(\lambda)} > 0 \tag{6-1-18}$$

と書ける．微分方程式 (6-1-18) と初期条件

$$\beta_a y(a,\lambda) - \alpha_a y'(a,\lambda) = 0 \tag{6-1-13 再掲}$$

を満たす解は

$$y_c = \frac{1}{2}\left(\alpha_a + \frac{\beta_a}{\sigma}\right)e^{\sigma(x-a)} + \frac{1}{2}\left(\alpha_a - \frac{\beta_a}{\sigma}\right)e^{-\sigma(x-a)} \tag{6-1-19}$$

である．λ が $\lambda_{\min}$ に近づくとき σ は限りなく増大するので，このとき解 (6-1-19) は

$$y_c = \alpha_a \cosh\sigma(x-a)$$

に近づく．すなわち，解は零点をもたない．

ここで，境界条件 (6-1-13) を満たすもとの微分方程式

$$\frac{d}{dx}\left(R(x,\lambda)\frac{dy}{dx}\right) - S(x,\lambda)y = 0 \tag{6-1-1$'$ 再掲}$$

の解を y_o と書くと，定理 6-4（比較定理（Ⅰ））の条件

i）$R(x,\lambda) \geq R_{\min}(\lambda) > 0, \quad S(x,\lambda) \geq S_{\min}(\lambda) \quad (a < \forall x < b)$

iii）$\alpha_s \neq 0$ のとき，$\alpha_r \neq 0$ であり，かつ

$$\frac{R(a,\lambda)\beta_a}{\alpha_a} \geq \frac{R_{\min}(\lambda)\beta_a}{\alpha_a}$$

を満足する．したがって，解 y_o は解 y_c より多くの零点をもたない．すなわち，零点を有しない．そして，λ を連続的に大きくしてゆくと，ある λ_0 のとき初めての零点が $x = b$ に発生する．さらに，区間 $a < x < b$ 内に零点をもたず，$x = a$ における境界条件 (6-1-13) を満足する，$\lambda_{\min} < \lambda < \lambda_0$ である λ に対応する唯一の解が存在することは明らかである．ゆえに定理は証明された．

例 6-3　第 1 種ベッセル関数

1 次のベッセル（Bessel, 1784 - 1846）の微分方程式

$$x^2\frac{d^2}{dx^2}y + x\frac{d}{dx}y + (x^2 - 1^2)y = 0 \tag{6-1-20}$$

の独立な解は，1 次の第 1 種および第 2 種のベッセル関数 $J_1(x), Y_1(x)$ であるから，式 (6-1-20) の一般解は

$$f(x) = c_1 J_1(x) + c_2 Y_1(x)$$

である．$f(kx)$ は微分方程式

$$(kx)^2 \frac{d^2}{d(kx)^2} f(kx) + (kx) \frac{d}{d(kx)} f(kx) + ((kx)^2 - 1) f(kx) = 0$$

すなわち，

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} f(kx) + x \frac{d}{dx} f(kx) + (k^2 x^2 - 1) f(kx) = 0$$

を満足する．これは，さらに

$$\frac{d^2}{dx^2} \{x f(kx)\} + \left(\lambda x - \frac{1}{x}\right) f(kx) = 0, \qquad \lambda = k^2 \tag{6-1-21}$$

と変形することができる．

いま，定義域を $0 \leq x \leq 1$ とすると，式 (6-1-21) は $R(0) = 0$ となる特異シュトゥルム-リゥヴィル問題である(6-1-7 項参照)．このとき，$x = 0$ における境界条件は，「$x = 0$ で解が解析的であること」となるので，$c_2 = 0$，すなわち

$$f(kx) = c_1 J_1(kx)$$

となる．なお，$x = 1$ では $f(1) = 0$ を課する．

本問題は特異シュトゥルム-リゥヴィル問題であるが，境界条件以外では振動定理(II)の条件を満たしており，その帰結を満たしている．

さて，1次の第1種ベッセル関数 $J_1(x)$ は，$x > 0$ の無限個の零点 ($j_{10} = 3.83171$, $j_{11} = 7.01559$, $j_{12} = 10.17347, \cdots$) をもつ(図 6-3)．

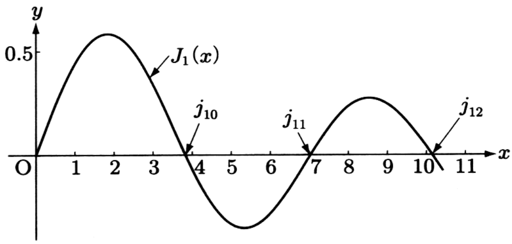


図 6-3　1次の第1種ベッセル関数

したがって，$y = J_1(x)$ を x 軸方向に $1/j_{1m}$ $(m = 0, 1, 2, \cdots)$ 倍に縮小した関数 $y = J_1(j_{1m}x)$ $(m = 0, 1, 2, \cdots)$ は，いずれも式 (6-1-21) と境界条件 $y(1) = 0$ からなる本問題の固有値 $\lambda_m = j_{1m}^2$ に対応する解であり，m 個の零点を有する(図 6-4)．　■

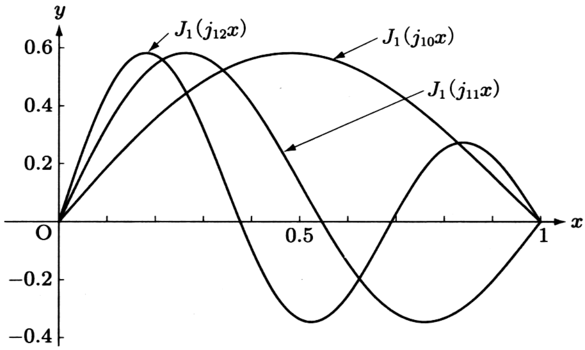


図 6-4 $J_1(x)$ を x 軸方向に縮小した関数

■ 6-1-5 周期的境界条件

本項では，区間 $a \leq x \leq b$ における微分方程式

$$\frac{d}{dx}\left(R(x,\lambda)\frac{dy}{dx}\right) - S(x,\lambda)y = 0 \tag{6-1-1$'$ 再掲}$$

に付与する新しい型の境界条件，すなわち周期的境界条件

$$y(a,\lambda) = y(b,\lambda), \qquad y'(a,\lambda) = y'(b,\lambda) \tag{6-1-22}$$

を考察する．これを周期的境界値問題(Ｉ)と呼ぶ．前節の斉次境界条件型で採用したうちの

i) $R(x,\lambda)$ および $S(x,\lambda)$ は x ならびにパラメータ λ の連続関数であり，λ の単調減少関数とし，$R(x,\lambda)$ は正で，x に関する連続な導関数をもつ $(\lambda_{\min} \leq \lambda \leq \lambda_{\max})$.

iii) $$-\frac{S_{\max}(\lambda)}{R_{\max}(\lambda)} \to +\infty, \qquad \lambda \to \lambda_{\max} \tag{6-1-15 再掲}$$

v) $$-\frac{S_{\min}(\lambda)}{R_{\min}(\lambda)} \to -\infty, \qquad \lambda \to \lambda_{\min} \tag{6-1-16 再掲}$$

に加え，本項ではさらに，

vi) $R(a,\lambda) = R(b,\lambda)$

を仮定する．

さて，$y_1(x,\lambda)$, $y_2(x,\lambda)$ をそれぞれ微分方程式 (6-1-1′)

$$\frac{d}{dx}\left(R(x,\lambda)\frac{dy_1(x,\lambda)}{dx}\right) - S(x,\lambda)y_1(x,\lambda) = 0 \tag{6-1-23}$$

$$\frac{d}{dx}\left(R(x,\lambda)\frac{dy_2(x,\lambda)}{dx}\right) - S(x,\lambda)y_2(x,\lambda) = 0 \tag{6-1-24}$$

と初期条件

$$y_1(a,\lambda)=1,\qquad y_1'(a,\lambda)=0$$
$$y_2(a,\lambda)=0,\qquad y_2'(a,\lambda)=1$$

を満足する基本解(基底)とする.

式(6-1-23)に $y_2(x,\lambda)$ をかけたものから，式(6-1-24)に $y_1(x,\lambda)$ をかけたものを引き，区間 $a\le x\le b$ にわたり積分すると，

$$\int_a^b\left[y_2(x,\lambda)\frac{d}{dx}\left(R(x,\lambda)\frac{dy_1(x,\lambda)}{dx}\right)-y_1(x,\lambda)\frac{d}{dx}\left(R(x,\lambda)\frac{dy_2(x,\lambda)}{dx}\right)\right]dx=0$$

を得る．被積分関数を変形すると，

$$\int_a^b\left[\frac{d}{dx}\left(R(x,\lambda)\frac{dy_1(x,\lambda)}{dx}y_2(x,\lambda)\right)-\frac{d}{dx}\left(R(x,\lambda)y_1(x,\lambda)\frac{dy_2(x,\lambda)}{dx}\right)\right]dx=0$$

すなわち

$$\left[R(x,\lambda)\left(\frac{dy_1(x,\lambda)}{dx}y_2(x,\lambda)-y_1(x,\lambda)\frac{dy_2(x,\lambda)}{dx}\right)\right]_a^b=0$$

となるので，任意の λ について成立する恒等式

$$y_1(b,\lambda)\frac{dy_2(b,\lambda)}{dx}-\frac{dy_1(b,\lambda)}{dx}y_2(b,\lambda)$$
$$=\left(y_1(a,\lambda)\frac{dy_2(a,\lambda)}{dx}-\frac{dy_1(a,\lambda)}{dx}y_2(a,\lambda)\right)\frac{R(a,\lambda)}{R(b,\lambda)}=1 \tag{6-1-25}$$

を得る．なお，最後の値1を得るために初期条件を用いた.

周期的境界値問題(Ⅰ)の解を

$$y(x,\lambda)=c_1y_1(x,\lambda)+c_2y_2(x,\lambda) \tag{6-1-26}$$

とおくと，

$$\begin{aligned}c_1y_1(a,\lambda)+c_2y_2(a,\lambda)&=c_1y_1(b,\lambda)+c_2y_2(b,\lambda)\\ c_1y_1'(a,\lambda)+c_2y_2'(a,\lambda)&=c_1y_1'(b,\lambda)+c_2y_2'(b,\lambda)\end{aligned} \tag{6-1-27}$$

でなければならない．さらに式(6-1-26)が有意な解であるためには，すなわち，連立方程式(6-1-27)が $c_1=c_2=0$ 以外の有意の解をもつためには，

$$\begin{vmatrix}y_1(a,\lambda)-y_1(b,\lambda) & y_2(a,\lambda)-y_2(b,\lambda)\\ y_1'(a,\lambda)-y_1'(b,\lambda) & y_2'(a,\lambda)-y_2'(b,\lambda)\end{vmatrix}=0$$

すなわち

$$\begin{vmatrix}1-y_1(b,\lambda) & -y_2(b,\lambda)\\ -y_1'(b,\lambda) & 1-y_2'(b,\lambda)\end{vmatrix}=0 \tag{6-1-28}$$

でなければならない．式 (6-1-28) に式 (6-1-25) を用いると，固有値方程式(特性方程式)

$$F(\lambda) \equiv y_1(b,\lambda) + y_2'(b,\lambda) - 2 = 0 \tag{6-1-29}$$

を得る．

固有値方程式 (6-1-29) の解のうち，単根を**単固有値**(simple eigenvalue)，重根を**複固有値**(multiple eigenvalue)と呼ぶ．複固有値に対応して，次のように，行列式 (6-1-28) のすべての要素が 0 となる二つの独立な解 $y_1(x,\lambda), y_2(x,\lambda)$ が存在する(6-2 節「フーリエ級数」が複固有値をもつ)．

$$y_1(b,\lambda) = 1, \qquad y_1'(b,\lambda) = 0$$

$$y_2(b,\lambda) = 0, \qquad y_2'(b,\lambda) = 1$$

次に，固有値方程式 (6-1-29) が無限個の固有値をもつことを証明する．まず，λ_k^{II} が微分方程式 (6-1-1′) と特別な(斉次)周期的境界条件

$$y(a,\lambda) = y(b,\lambda) = 0 \tag{6-1-30}$$

により構成される問題(これを周期的境界値問題(II)と呼ぶ)の固有値であるとする．なお，周期的境界条件 (6-1-30) は，6-1-4 項のシュトゥルム問題における境界条件 (6-1-13, 14) において，

$$\alpha_a = \alpha_b = 0$$

とおいたものに対応する．したがって，周期的境界値問題(II)の固有値は無限個存在し，固有値 λ_k^{II} $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ の固有関数 $Y_k^{\mathrm{II}}(x)$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ は区間 $a < x < b$ 内に k 個の零点をもつ(本問題では，それらに加えて両端点 $x = a, b$ も零点である)．

本問題，すなわち周期的境界値問題(II)は，一般的な周期的境界問題，すなわち周期的境界値問題(I)の特別な場合であるから，その固有値 $\{\lambda_k^{\mathrm{II}}\}$ は，必ずしも問題(I)の固有値に一致するとは限らない．

さて，固有関数 $Y_k^{\mathrm{II}}(x)$ の任意の実数倍も同じ固有値に対する固有関数であるから，適当な実数を選ぶことにより，

$$Y_k^{\mathrm{II}\prime}(a) = 1$$

とすることができる．すなわち，固有関数 $Y_k^{\mathrm{II}}(x)$ は周期的境界値問題(I)の $y_2(x, \lambda_k^{\mathrm{II}})$ である．そこで，境界条件 (6-1-30) により

$$y_2(b, \lambda_k^{\mathrm{II}}) = 0$$

であるから，式 (6-1-25) は

$$y_1(b, \lambda_k^{\mathrm{II}}) \frac{dy_2(b, \lambda_k^{\mathrm{II}})}{dx} = 1$$

と簡略化される．したがって，固有値方程式 (6-1-29) の左辺は

$$F(\lambda_k^{\mathrm{II}}) = y_1(b,\lambda_k^{\mathrm{II}}) + \frac{1}{y_1(b,\lambda_k^{\mathrm{II}})} - 2 = \frac{\left(y_1(b,\lambda_k^{\mathrm{II}})-1\right)^2}{y_1(b,\lambda_k^{\mathrm{II}})} = \frac{\left(y_2'(b,\lambda_k^{\mathrm{II}})-1\right)^2}{y_2'(b,\lambda_k^{\mathrm{II}})}$$

となる．すなわち，$F(\lambda_k^{\mathrm{II}})$ は

$$y_1(b,\lambda_k^{\mathrm{II}}) = y_2'(b,\lambda_k^{\mathrm{II}}) = 1$$

のときに限り 0 となる．このとき，周期的境界値問題(II)の固有値 λ_k^{II} は同時に周期的境界値問題(I)の固有値でもある．

その他の場合，すなわち，

$$y_1(b,\lambda_k^{\mathrm{II}}) \neq 1 \quad \text{かつ} \quad y_2'(b,\lambda_k^{\mathrm{II}}) \neq 1$$

であるとき，$F(\lambda_k^{\mathrm{II}})$ の符号は $y_1(b,\lambda_k^{\mathrm{II}})$ および $y_2'(b,\lambda_k^{\mathrm{II}})$ の符号に一致する．

ところで，

$$y_2(a,\lambda_k^{\mathrm{II}}) = y_2(b,\lambda_k^{\mathrm{II}}) = 0, \qquad y_2'(a,\lambda_k^{\mathrm{II}}) = 1\ (>0)$$

であるから，$y_2(x,\lambda_k^{\mathrm{II}})$ が区間 $a<x<b$ 内に偶数個の零点をもつとき，$y_2'(b,\lambda_k^{\mathrm{II}})<0$ となり，奇数個の零点をもつとき，$y_2'(b,\lambda_k^{\mathrm{II}})>0$ となる．それゆえ，k が偶数のとき $F(\lambda_k^{\mathrm{II}})<0$，$k$ が奇数のとき $F(\lambda_k^{\mathrm{II}}) \geq 0$ となる（等号は $y_2'(b,\lambda_k^{\mathrm{II}})=1$ のとき）．

したがって，固有値方程式 $F(\lambda)=0$ は，各区間 $(\lambda_n^{\mathrm{II}},\lambda_{n+1}^{\mathrm{II}})$ $(n=0,1,2,\cdots)$ に少なくとも 1 個（複数個の場合は奇数個．ただし重根は 2 個と数える）の零点をもつ．

次に，各区間 $(\lambda_n^{\mathrm{II}},\lambda_{n+1}^{\mathrm{II}})$ $(n=0,1,2,\cdots)$ に唯 1 個の零点をもつことを証明する．そのためには，ある一つの区間 $(\lambda_n^{\mathrm{II}},\lambda_{n+1}^{\mathrm{II}})$ 内のすべての固有値 λ において，固有値方程式 (6-1-29) から得られる $F'(\lambda)$

$$F'(\lambda) = \frac{\partial y_1(b,\lambda)}{\partial \lambda} + \frac{\partial y_2'(b,\lambda)}{\partial \lambda} \tag{6-1-31}$$

の符号が一定であることを示せばよい．

そこで，再び初期値問題

$$\frac{d}{dx}\left(R(x)\frac{dy}{dx}\right) - S(x,\lambda)y = 0 \tag{6-1-1$'$ 再掲}$$

$$y(a,\lambda) = \alpha, \qquad y'(a,\lambda) = \beta$$

を考察する．その解を $Y(x,\lambda)$ とおくと，$\dfrac{\partial Y(x,\lambda)}{\partial \lambda}$ は非斉次微分方程式

$$\frac{d}{dx}\left\{R(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial Y(x,\lambda)}{\partial \lambda}\right)\right\} - S(x,\lambda)\frac{\partial Y(x,\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{\partial S(x,\lambda)}{\partial \lambda}Y(x,\lambda) \tag{6-1-32}$$

を満たす．微分方程式 (6-1-32) に対応する斉次微分方程式 (6-1-1′) の基本解は

$$y_1(x,\lambda), \qquad y_2(x,\lambda)$$

であるから，定数変化法[5, 12]により，非斉次微分方程式 (6-1-32) の解を次のように $y_1(x,\lambda)$, $y_2(x,\lambda)$ で表すことができる．

$$\frac{\partial Y(x,\lambda)}{\partial\lambda} = \frac{1}{R(a)}\int_a^x \frac{\partial S(t,\lambda)}{\partial\lambda} Y(t,\lambda)\{y_1(t,\lambda)y_2(x,\lambda) - y_1(x,\lambda)y_2(t,\lambda)\}\,dt \qquad (6\text{-}1\text{-}33)$$

式 (6-1-33) で $x = b$, $Y(x,\lambda) = y_1(x,\lambda)$ と選ぶと

$$\frac{\partial y_1(b,\lambda)}{\partial\lambda} = \frac{1}{R(a)}\int_a^b \frac{\partial S(t,\lambda)}{\partial\lambda} y_1(t,\lambda)\{y_1(t,\lambda)y_2(b,\lambda) - y_1(b,\lambda)y_2(t,\lambda)\}\,dt$$

を得る．

また，式 (6-1-33) から

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\partial Y(x,\lambda)}{\partial x}\right) = \frac{1}{R(a)}\int_a^x \frac{\partial S(t,\lambda)}{\partial\lambda} Y(t,\lambda)\{y_1(t,\lambda)y_2'(x,\lambda) - y_1'(x,\lambda)y_2(t,\lambda)\}\,dt \qquad (6\text{-}1\text{-}34)$$

を得るので，$x = b$, $Y(x,\lambda) = y_2(x,\lambda)$ と選ぶと

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}y_2'(b,\lambda) = \frac{1}{R(a)}\int_a^b \frac{\partial S(t,\lambda)}{\partial\lambda} y_2(t,\lambda)\{y_1(t,\lambda)y_2'(b,\lambda) - y_1'(b,\lambda)y_2(t,\lambda)\}\,dt$$

を得る．したがって，式 (6-1-31) は

$$\begin{aligned} F'(\lambda) = \frac{1}{R(a)}\int_a^b \frac{\partial S(t,\lambda)}{\partial\lambda}&[y_2(b,\lambda)y_1^2(t,\lambda) \\ &+ \{y_2'(b,\lambda) - y_1(b,\lambda)\}y_1(t,\lambda)y_2(t,\lambda) - y_1'(b,\lambda)y_2^2(t,\lambda)]dt \end{aligned} \qquad (6\text{-}1\text{-}35)$$

となる．

まず，単固有値（固有値方程式 $F(\lambda) = 0$ の単根）

$$y_1'(b,\lambda) \neq 0, \qquad y_2(b,\lambda) \neq 0$$

の場合を考える．このとき，

$$R(a) > 0, \qquad \frac{\partial S(a,\lambda)}{\partial\lambda} < 0$$

であるから，$F'(\lambda)$ の符号は 2 次形式

$$y_2(b,\lambda)y_1^2(t,\lambda) + \{y_2'(b,\lambda) - y_1(b,\lambda)\}y_1(t,\lambda)y_2(t,\lambda) - y_1'(b,\lambda)y_2^2(t,\lambda) \qquad (6\text{-}1\text{-}36)$$

の符号と逆になる．2 次形式 (6-1-36) の判別式

$$(y_2'(b,\lambda) - y_1(b,\lambda))^2 + 4y_1'(b,\lambda)y_2(b,\lambda)$$

は式 (6-1-25) により

$$\{y_1(b,\lambda) + y_2'(b,\lambda)\}^2 - 4$$

となる．したがって，λ が固有値方程式

$$F(\lambda) \equiv y_1(b,\lambda) + y_2'(b,\lambda) - 2 = 0 \quad \text{(6-1-29 再掲)}$$

の解であるとき，判別式は 0 となるので，2 次形式 (6-1-36) の符号は $y_2(b,\lambda)$ の符号（同時に $-y_1'(b,\lambda)$ の符号でもある）に等しい．したがって，連続する固有値 $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_m, \cdots)$ において，$F(\lambda_m)$ は交互に符号をかえる．一方，各区間 $(\lambda_n^{\mathrm{II}}, \lambda_{n+1}^{\mathrm{II}})$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ 内で $y_2(b,\lambda)$ の符号は一定であるから $F'(\lambda)$ の符号も一定である．ゆえに，固有値方程式 $F(\lambda) = 0$ は，各区間 $(\lambda_n^{\mathrm{II}}, \lambda_{n+1}^{\mathrm{II}})$ 内に唯 1 個の零点しかもちえない．

次に，複固有値（固有値方程式 $F(\lambda) = 0$ の重根）

$$y_1(b,\lambda) = 1, \qquad y_1'(b,\lambda) = 0$$

$$y_2(b,\lambda) = 0, \qquad y_2'(b,\lambda) = 1$$

の場合には，

$$F'(\lambda) = 0$$

であり，k が偶数のとき $y_2'(b,\lambda_k^{\mathrm{II}}) < 0$ であるから $F(\lambda_k^{\mathrm{II}}) < 0$，$k$ が奇数のとき $y_2'(b,\lambda_k^{\mathrm{II}}) > 0$ であるから $F(\lambda_k^{\mathrm{II}}) \geq 0$ であり，複固有値は，$\lambda_{2n+1}^{\mathrm{II}}$（$n$：0 または自然数）に一致する．

以上をまとめると，固有値方程式 $F(\lambda) = 0$ の解は，それが重根である場合には，$\lambda_{2n+1}^{\mathrm{II}}$（$n$：0 または自然数）に一致し，その他の単根は各区間 $(\lambda_n^{\mathrm{II}}, \lambda_{n+1}^{\mathrm{II}})$ 内に 1 個ずつ分布する．

■ 6-1-6　シュトゥルム - リゥヴィル問題

本項以下で取り扱う，シュトゥルム - リゥヴィル方程式

$$\frac{d}{dx}\left(R(x)\frac{dy}{dx}\right) + (\lambda U(x) - V(x))y = 0 \quad \text{(6-1-37)}$$

に斉次境界条件

$$\beta_a y(a,\lambda) - \alpha_a y'(a,\lambda) = 0 \quad \text{(6-1-13 再掲)}$$

$$\beta_b y(b,\lambda) + \alpha_b y'(b,\lambda) = 0 \quad \text{(6-1-14 再掲)}$$

を組み合わせたものをシュトゥルム - リゥヴィル問題（Ⅰ）と，また周期的境界条件

$$y(a,\lambda) = y(b,\lambda), \qquad y'(a,\lambda) = y'(b,\lambda) \quad \text{(6-1-22 再掲)}$$

を組み合わせたものをシュトゥルム - リゥヴィル問題（Ⅱ）と呼ぶ．**シュトゥルム - リゥヴィル問題**は，物理学の広範囲の問題に関連して出現する典型的な 2 階線形常微分方程式系の問題である．ここに，$R(x), U(x), V(x)$ は区間 $a \leq x \leq b$ において，パラメータ λ に依存しない x の実連続関数であり，かつ，

$$R(x) > 0, \qquad U(x) > 0$$

とする($R(a)=0$ または $R(b)=0$ のとき，特異シュトゥルム-リゥヴィル問題(6-1-7項))．また，係数 $\alpha_a,\alpha_b,\beta_a,\beta_b$ もパラメータ λ に依存しないものとする．このとき，

$$S(x,\lambda)\equiv V(x)-\lambda U(x)$$

は区間 $a\le x\le b$ 内のすべての x において，λ の単調減少関数である．特に，

$$-\frac{S_{\max}(\lambda)}{R_{\max}(\lambda)}\to+\infty,\qquad \lambda\to\lambda_{\max} \tag{6-1-15 再掲}$$

が成り立つ．したがって，シュトゥルム-リゥヴィル問題(Ⅰ)は定理 6-7（振動定理(Ⅱ))により，またシュトゥルム-リゥヴィル問題(Ⅱ)は前項の解析により，無限個の実数固有値が存在する．それらを小さい順に

$$\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \cdots,\ \lambda_m,\ \cdots$$

とならべ，それぞれの固有値に対応する解(固有関数)を

$$Y_0(x),\ Y_1(x),\ Y_2(x),\ Y_3(x),\ \cdots,\ Y_m(x),\ \cdots$$

と書くと，解 Y_m は区間 $a<x<b$ 内に m 個の零点を有する．特に，複固有値の場合には，たとえば，

$$\lambda_0,\ \lambda_1=\lambda_2,\ \lambda_3=\lambda_4,\ \cdots,\ \lambda_{2n-1}=\lambda_{2n},\ \cdots$$

となるが(6-2 節「フーリエ級数」参照)，それぞれの複固有値に対応して二つの独立な固有関数

$$Y_0(x),\ Y_1(x),\ Y_2(x),\ Y_3(x),\ Y_4(x),\ \cdots,\ Y_{2n-1}(x),\ Y_{2n}(x),\ \cdots$$

が存在する．

▌[固有関数の直交性]

シュトゥルム-リゥヴィル問題(ⅠおよびⅡ)の固有値のうちの二つを λ_m,λ_n とし，それぞれの固有値に対応する固有関数を y_m,y_n とすると，

$$\frac{d}{dx}\left(R(x)\frac{dy_m}{dx}\right)+(\lambda_m U(x)-V(x))y_m=0 \tag{6-1-38}$$

$$\frac{d}{dx}\left(R(x)\frac{dy_n}{dx}\right)+(\lambda_n U(x)-V(x))y_n=0 \tag{6-1-39}$$

となる．式 (6-1-38) に y_n をかけたものから，式 (6-1-39) に y_m をかけたものをひき，区間 $a\le x\le b$ にわたり積分すると，

$$\int_a^b\left\{y_n\frac{d}{dx}\left(R(x)\frac{dy_m}{dx}\right)-y_m\frac{d}{dx}\left(R(x)\frac{dy_n}{dx}\right)\right\}dx+(\lambda_m-\lambda_n)\int_a^b U(x)y_my_n\,dx=0$$

を得る．左辺第1項を変形すると，

$$\int_a^b \left\{ \frac{d}{dx}\left(R(x)\frac{dy_m}{dx}y_n\right) - \frac{d}{dx}\left(R(x)y_m\frac{dy_n}{dx}\right)\right\} dx + (\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b U(x)y_m y_n\, dx = 0$$

すなわち，

$$\left\{R(x)\left(\frac{dy_m}{dx}y_n - y_m\frac{dy_n}{dx}\right)\right\}_a^b + (\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b U(x)y_m y_n\, dx = 0 \qquad (6\text{-}1\text{-}40)$$

となる．式 (6-1-40) の左辺第1項は，シュトゥルム-リゥヴィル問題(Ⅰ)の場合は境界条件 (6-1-13, 14) により，またシュトゥルム-リゥヴィル問題(Ⅱ)の場合は境界条件 (6-1-22) により0である．こうして，

$$(\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b U(x)y_m y_n\, dx = 0$$

を得る．ゆえに，異なる固有値 $\lambda_m \neq \lambda_n$ に対応する固有関数 y_m, y_n は直交する．

$$\int_a^b U(x)y_m y_n\, dx = 0 \qquad (6\text{-}1\text{-}41)$$

式 (6-1-41) を固有関数の**直交条件**と呼び，直交条件を満たす関数列

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ \cdots,\ y_m,\ \cdots$$

を直交関数列，または直交関数系と呼ぶ．また，それぞれの固有関数を実数倍し，

$$\int_a^b U(x)y_m^2\, dx = 1 \qquad (6\text{-}1\text{-}42)$$

と規格化したものを，**正規直交関数列**，または**正規直交関数系**と呼ぶ．

■［正規直交関数列による関数の展開］

区間 $a \le x \le b$ において，シュトゥルム-リゥヴィル問題の正規直交関数列

$$y_0(x),\ y_1(x),\ y_2(x),\ \cdots,\ y_m(x),\ \cdots$$

が得られており，連続関数 $f(x)$ の正規直交関数列による展開

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k y_k(x) \qquad (6\text{-}1\text{-}43)$$

が可能であり，この級数が一様収束して項別積分が可能である場合には，規格直交条件式 (6-1-41, 42) により

$$\int_a^b U(x)y_m(x)f(x)\, dx = \int_a^b U(x)y_m(x)\sum_{k=0}^{\infty} c_k y_k(x)\, dx = c_m \qquad (6\text{-}1\text{-}44)$$

すなわち，係数 $\{c_m\}$ $(m = 0, 1, 2, \cdots)$ を算出する公式を得る．

そこで，式 (6-1-44) により定まる係数 $\{c_m\}$ $(m = 0, 1, 2, \cdots)$ を用いた正規直交関数列による展開式

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k y_k(x) \tag{6-1-45}$$

を関数 $f(x)$ の**フーリエ**(Fourier)**型級数**(または**一般フーリエ級数**)，係数 $\{c_m\}$ $(m = 0, 1, 2, \cdots)$ を**フーリエ型係数**と呼ぶ.

正規直交関数列の完備性(完全性)の一般論にはふれないが，6-2 節でフーリエ級数の収束条件を詳述する.

■ 6-1-7 （参考） 特異シュトゥルム - リゥヴィル問題

シュトゥルム - リゥヴィル微分方程式

$$\frac{d}{dx}\left(R(x)\frac{dy}{dx}\right) + (\lambda U(x) - V(x))y = 0 \qquad \text{(6-1-37 再掲)}$$

中の $R(x)$ が，独立変数の定義域である閉区間 $a \leq x \leq b$ の端点において 0 になるとき，すなわち，

$$R(a) = 0 \quad \text{または(かつ)} \quad R(b) = 0$$

である場合，特異シュトゥルム微分方程式(特異シュトゥルム問題)と呼ぶ.

特異シュトゥルム - リゥヴィル問題に関しては詳述しないが，先に採り上げた，例 6-1 のルジャンドルの微分方程式 (6-1-6)，および例 6-3 のベッセルの微分方程式 (6-1-20) は特異シュトゥルム問題であるので，ここで簡単に解説しておく.

$R(x_0) = 0$ となる点 x_0 は，微分方程式 (6-1-37) の**係数特異点**である．一般に，係数特異点はその微分方程式の**解の特異点**である可能性があるが，解の通常点である場合もある[13]．シュトゥルム問題の独立変数の定義域の端点において $R(x) = 0$ になるとき，その特異シュトゥルム問題における係数特異点である端点に(固有値を決定すべく)課せられる境界条件は，「その端点が解の通常点である」である．以下，二つの例に沿って説明しよう.

■ [ルジャンドルの微分方程式]

$$\frac{d}{dx}\left((1 - x^2)\frac{dy}{dx}\right) + \lambda y = 0 \qquad (-1 \leq x \leq 1) \tag{6-1-46}$$

は，式 (6-1-37) において，

$$R(x) = 1 - x^2$$

$$U(x) = 1$$

$$V(x) = 0$$

とおいたものであるが，定義域の両端点において

$$R(\pm 1) = 0$$

である．したがって，定義域の両端点 $x = \pm 1$ はいずれも係数特異点であるが，詳しくは**正規特異点**(regular singular point)と分類されるものである[13]．そこで，「定義域の両端点 $x = \pm 1$ において微分方程式 (6-1-46) の解が解析的である」という境界条件を課す．

さて，原点は微分方程式 (6-1-46) の通常点であるから，その解を原点まわりのベキ級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{6-1-47}$$

として，求めることができる[13]．式 (6-1-47) を式 (6-1-46) に代入し，x の等しいベキの係数を比較すると，

x^0 の係数：$2a_2 + \lambda a_0 = 0$

x^1 の係数：$6a_3 + (\lambda - 2)a_1 = 0$

x^k $(k = 2, 3, 4, \cdots)$ の係数：$(k+1)(k+2)a_{k+2} + \{\lambda - k(k+1)\}a_k = 0$

すなわち

$$a_{k+2} = \frac{k(k+1) - \lambda}{(k+1)(k+2)} a_k \tag{6-1-48}$$

を得る．式 (6-1-48) を用いると，

$$\frac{1}{R^2} = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \frac{a_{k+2}}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+2}}{a_k} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{k(k+1) - \lambda}{(k+1)(k+2)} \right| = 1$$

であるから，微分方程式 (6-1-46) のベキ級数解 (6-1-47) の収束半径 R は 1 である．すなわち，定義域の両端点 $x = \pm 1$ は，いずれも収束半径上に位置する．

そこで，両端点 $x = \pm 1$ でベキ級数解 (6-1-47) が収束するか否かを判定するために，定理 3-12 を用いると，式 (6-1-48) より

$$\left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \sqrt{\frac{(1 + 1/k)(1 + 2/k)}{1 + 1/k - \lambda/k^2}} = 1 + \frac{1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right), \qquad k \to \infty$$

を得るので，ベキ級数(無限級数)解 (6-1-47) は両端点 $x = \pm 1$ で発散する．したがって，微分方程式 (6-1-46) のベキ級数解 (6-1-47) が解析的であるためには，ベキ級数解は有限級数でなければならない．すなわち，式 (6-1-48) の右辺分子がある k において 0 でなければならない．この条件より，微分方程式 (6-1-46) の固有値 λ が定まる．

$$\lambda_n = n(n+1) \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

これを代入したものが，いわゆるルジャンドルの微分方程式

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{dy}{dx}\right) + n(n+1)y = 0 \qquad (-1 \leq x \leq 1) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \quad \text{(6-1-6 再掲)}$$

であり，その有限級数(多項式)解がルジャンドル多項式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

である.

■ [ベッセルの微分方程式]

ベッセルの微分方程式

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + \left(\lambda x - \frac{1}{x}\right)y = 0 \qquad (0 \leq x \leq 1) \qquad \text{(6-1-21 再掲)}$$

は，式 (6-1-37) において，

$$R(x) = x$$

$$U(x) = x$$

$$V(x) = \frac{1}{x}$$

とおいたものであるが，定義域の左端点である原点において

$$R(0) = 0, \qquad V(x) \to +\infty, \qquad x \to 0+$$

である．したがって，定義域の左端点である原点 $x = 0$ は係数特異点であるが，これも正規特異点である．そこで，「原点 $x = 0$ において微分方程式 (6-1-21) の解が解析的である」という境界条件を課すと，式 (6-1-21) の二つの独立な解 $J_1(\sqrt{\lambda}x), Y_1(\sqrt{\lambda}x)$ のうち，原点で解析的でない第 2 種ベッセル関数 $Y_1(\sqrt{\lambda}x)$ が取り除かれる．固有値 λ の値は，もう一つの端点 $x = 1$ における境界条件 $y(1) = 0$ から定まることは，6-1-4 項でみてきた通りである.

6-2 フーリエ級数

■ 6-2-1 フーリエ級数展開

シュトゥルム - リゥヴィル問題(Ⅱ)の固有関数から派生した，正規直交関数列による関数の展開の代表的な例が，フーリエ級数展開である．フーリエ級数展開は，シュトゥルム - リゥヴィル方程式 (6-1-37) において，

$$R(x) = U(x) = 1, \qquad V(x) = 0 \tag{6-2-1}$$

とした微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0 \tag{6-2-2}$$

と周期的境界条件 (6-1-22) からなる境界値問題の固有関数による級数展開である．

微分方程式 (6-2-2) は以下の諸仮定を満たしている．

① 6-1-5 項（周期的境界条件）で設けた諸仮定

i) $R(x,\lambda) = R_{\max}(\lambda) = R_{\min}(\lambda) = 1$ および $S(x,\lambda) \equiv V(x) - \lambda U(x) = S_{\max}(\lambda) = S_{\min}(\lambda) = -\lambda$ は，x ならびにパラメータ λ の連続関数であり，λ の単調減少関数である．また，$R(x,\lambda)$ は正で，x に関する連続な導関数をもつ（$\lambda_{\min} = -\infty < \lambda < \lambda_{\max} = +\infty$）．

iii) $$-\frac{S_{\max}(\lambda)}{R_{\max}(\lambda)} \to +\infty, \qquad \lambda \to \lambda_{\max} \tag{6-1-15 再掲}$$

v) $$-\frac{S_{\min}(\lambda)}{R_{\min}(\lambda)} \to -\infty, \qquad \lambda \to \lambda_{\min} \tag{6-1-16 再掲}$$

vi) $R(a,\lambda) = R(b,\lambda)$

② 6-1-6 項（シュトゥルム-リゥヴィル問題）で設けた仮定

$$R(x) = 1 > 0, \qquad U(x) = 1 > 0$$

したがって，シュトゥルム-リゥヴィル問題（II）に関して得られたすべての結果を適用することができる．すなわち，本問題には，無限個の実数固有値が存在し，それらを小さい順に

$$\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \cdots,\ \lambda_m,\ \cdots$$

とならべ，それぞれの固有値に対応する解（固有関数）を

$$Y_0(x),\ Y_1(x),\ Y_2(x),\ Y_3(x),\ \cdots,\ Y_m(x),\ \cdots$$

と書くと，解 $Y_m(x)$ は区間 $a < x < b$ 内に m 個の零点を有する．

さて，定数係数微分方程式 (6-2-2) の解を

$$y = e^{kx} \qquad (k：定数)$$

とおき，式 (6-2-2) に代入すると，

$$(k^2 + \lambda)e^{kx} = 0$$

となるので，二つの独立な解

$$\exp(\sqrt{-\lambda}x), \qquad \exp(-\sqrt{-\lambda}x) \tag{6-2-3}$$

を得る．

$\lambda < 0$ であると，解 (6-2-3) はいずれも単調な指数関数となり，周期的境界条件 (6-1-22) を満たすことができない．ゆえに，$\lambda > 0$ を明確にするため，これらを

$$\widehat{y}_1 = \exp\left(i\sqrt{\lambda}x\right), \qquad \widehat{y}_2 = \exp\left(-i\sqrt{\lambda}x\right) \tag{6-2-4}$$

と書く．

ここで，二つの独立な解 (6-2-4) に周期的境界条件 (6-1-22) を課して固有値を求める方法をとる場合が多い．しかし，その固有値が複固有値であること，ならびにそれぞれの複固有値に二つの固有関数が存在し，それらの零点の個数が一つ異なることなどを明確にすべく，以下では 6-1-5 項の手法に従って固有値を求める．

そこでまず，微分方程式 (6-2-2) の解，すなわち二つの独立な解 (6-2-4) の 1 次結合である一般解

$$y(x,\lambda) = c_1\widehat{y}_1(x,\lambda) + c_2\widehat{y}_2(x,\lambda) \tag{6-1-26 再掲}$$

に，それぞれ初期条件

$$y_1(a,\lambda) = 1, \qquad y_1'(a,\lambda) = 0$$

$$y_2(a,\lambda) = 0, \qquad y_2'(a,\lambda) = 1$$

を課した特解(基本解，基底)を求めると，それらは

$$y_1(x,\lambda) = \cos\sqrt{\lambda}(x-a), \qquad y_2(x,\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}(x-a) \tag{6-2-5}$$

である．これらは，恒等式

$$y_1(b,\lambda)\frac{dy_2(b,\lambda)}{dx} - \frac{dy_1(b,\lambda)}{dx}y_2(b,\lambda) = 1 \tag{6-1-25 再掲}$$

を満たす．

周期的境界値問題 (6-2-2, 6-1-22) の解を

$$y(x,\lambda) = c_1y_1(x,\lambda) + c_2y_2(x,\lambda)$$

とおくと，境界条件 (6-1-22) より，

$$c_1y_1(a,\lambda) + c_2y_2(a,\lambda) = c_1y_1(b,\lambda) + c_2y_2(b,\lambda)$$

$$c_1y_1'(a,\lambda) + c_2y_2'(a,\lambda) = c_1y_1'(b,\lambda) + c_2y_2'(b,\lambda)$$

を得る．c_1, c_2 がともには 0 でない有意な解をもつためには，

$$\begin{vmatrix} y_1(a,\lambda) - y_1(b,\lambda) & y_2(a,\lambda) - y_2(b,\lambda) \\ y_1'(a,\lambda) - y_1'(b,\lambda) & y_2'(a,\lambda) - y_2'(b,\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

すなわち

$$\begin{vmatrix} 1-\cos\sqrt{\lambda}(b-a) & -\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}(b-a) \\ \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}(b-a) & 1-\cos\sqrt{\lambda}(b-a) \end{vmatrix} = 0 \tag{6-2-6}$$

でなければならない．これから，固有値方程式

$$F(\lambda) = 2 - 2\cos\sqrt{\lambda}(b-a) = 0 \tag{6-2-7}$$

を得る．

固有値方程式 (6-2-7) の解

$$\sqrt{\lambda}(b-a) = 2k\pi \qquad (k：整数)$$

すなわち，無限個の固有値

$$\lambda_k = \frac{(2k\pi)^2}{(b-a)^2} \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

は，行列式 (6-2-6) のすべての項を 0 とする複固有値であり，$\lambda_0 = 0$ を除き，二つずつの固有関数

$$y_1(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}(x-a), \qquad y_2(x, \lambda_k) = \cos\sqrt{\lambda_k}(x-a)$$

をもつ．

それゆえ，6-1-5 項の書き方に従い，無限個の固有値を

$$\lambda_0 = 0, \qquad \lambda_{2n-1} = \lambda_{2n} = \frac{(2n\pi)^2}{(b-a)^2} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

と表記すれば，それぞれの固有値に対応する，式 (6-1-42) により規格化された固有関数 $Y_k(x)$

$$Y_0(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}}$$

$$Y_{2n-1}(x) = \sqrt{\frac{2}{b-a}}\sin\frac{2n\pi}{b-a}(x-a)$$

$$Y_{2n}(x) = \sqrt{\frac{2}{b-a}}\cos\frac{2n\pi}{b-a}(x-a) \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

は，区間 $a < x < b$ 内に k 個の零点をもち（図 6-5），さらに規格直交条件 (6-1-41, 42)

$$\int_a^b Y_m(x)Y_n(x)\,dx = \delta_{mn}$$

を満足する．

したがって，区間 $a \leq x \leq b$ 内で連続であり，周期的境界条件 (6-1-22) を満たす関数 $f(x)$ のフーリエ係数は，

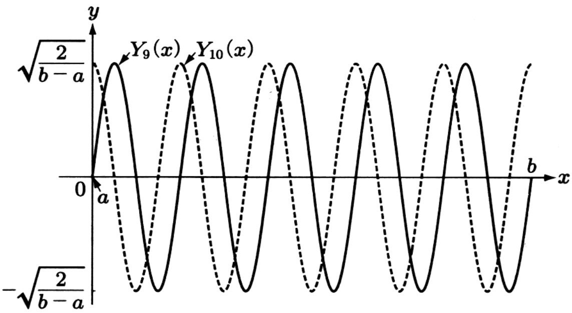


図 6-5 規格化された固有関数の例 $Y_9(x), Y_{10}(x)$

$$c_0 = \int_a^b U(x)Y_0(x)f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{b-a}}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$c_{2n} = \int_a^b U(x)Y_{2n}(x)f(x)\,dx = \sqrt{\frac{2}{b-a}}\int_a^b f(x)\cos\frac{2n\pi}{b-a}(x-a)\,dx$$

$$c_{2n-1} = \int_a^b U(x)Y_{2n-1}(x)f(x)\,dx = \sqrt{\frac{2}{b-a}}\int_a^b f(x)\sin\frac{2n\pi}{b-a}(x-a)\,dx$$

となり，フーリエ級数は，

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k Y_k(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}}c_0 + \sqrt{\frac{2}{b-a}}\sum_{n=1}^{\infty} c_{2n}\cos\frac{2n\pi}{b-a}(x-a)$$
$$+ \sqrt{\frac{2}{b-a}}\sum_{n=1}^{\infty} c_{2n-1}\sin\frac{2n\pi}{b-a}(x-a) \qquad (6\text{-}2\text{-}8)$$

となる．

通例にならい，このフーリエ係数 $\{c_k\}$ の番号 k を cos および sin の次数に合わせ，さらに定数をかけて定義すると，

$$a_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{b-a}}c_0 = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$
$$a_n \equiv \sqrt{\frac{2}{b-a}}c_{2n} = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{2n\pi}{b-a}(x-a)\,dx \qquad (6\text{-}2\text{-}9)$$
$$b_n \equiv \sqrt{\frac{2}{b-a}}c_{2n-1} = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\frac{2n\pi}{b-a}(x-a)\,dx$$

となり，フーリエ級数は，

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{2n\pi}{b-a}(x-a) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{2n\pi}{b-a}(x-a) \qquad (6\text{-}2\text{-}10)$$

と整理される．級数 (6-2-10) は振幅と位相を係数とする級数

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left\{\frac{2n\pi}{b-a}(x-a) + \theta_n\right\}$$

と等価であり，このほうが理解しやすいかもしれない．

一般のテキストに頻出する，式 (6-2-9, 10) の区間 $-T/2 \leq x \leq T/2$ (T：周期) の場合の表式を求めておこう．

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,dx$$

$$a_n = (-1)^n \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right)dx \tag{6-2-9'}$$

$$b_n = (-1)^n \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right)dx$$

$$\begin{aligned} &a_0 + (-1)^n\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) + (-1)^n\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) \\ &\quad = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,dx + \frac{2}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)dt\cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) \\ &\qquad + \frac{2}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)dt\sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) \end{aligned} \tag{6-2-10'}$$

■ [複素フーリエ級数]

実フーリエ級数 (6-2-10) において，三角関数を複素指数関数

$$\cos\frac{2n\pi}{b-a}(x-a) = \frac{1}{2}\left\{\exp i\frac{2n\pi}{b-a}(x-a) + \exp i\frac{-2n\pi}{b-a}(x-a)\right\}$$

$$\sin\frac{2n\pi}{b-a}(x-a) = \frac{1}{2i}\left\{\exp i\frac{2n\pi}{b-a}(x-a) - \exp i\frac{-2n\pi}{b-a}(x-a)\right\}$$

で表すと，

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n - ib_n}{2}\exp i\frac{2n\pi}{b-a}(x-a) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n + ib_n}{2}\exp i\frac{-2n\pi}{b-a}(x-a)$$

となる．ここで

$$c_n \equiv \begin{cases} \dfrac{a_n - ib_n}{2} & (n = 1, 2, 3, \cdots) \\ \dfrac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} & (n = -1, -2, -3, \cdots) \\ a_0 & (n = 0) \end{cases}$$

と定義すると，実フーリエ級数 (6-2-10) と等価で簡潔な**複素フーリエ級数**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp i\frac{2n\pi}{b-a}(x-a) \tag{6-2-11}$$

を得る．

■ 6-2-2　フーリエ級数の収束

前項で得た，区間 $a \leq x \leq b$ における境界値問題 (6-2-2, 6-1-22) の固有関数による，有界な導関数をもつ関数 $f(x)$ のフーリエ級数展開 (6-2-10) が，式 (6-1-44) により係数 $\{c_m\}$ $(m = 0, 1, 2, \cdots)$ を算出したもとの関数 $f(x)$ に収束する，すなわち

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2n\pi}{b-a}(x-a) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{2n\pi}{b-a}(x-a) \qquad \text{(6-1-43 再掲)}$$

となる条件を求める．

■［フーリエ級数 (6-2-10) の一様収束］

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{2n\pi}{b-a}(x-a)\,dx \\
&= \frac{1}{n\pi}\left[f(x)\sin\frac{2n\pi}{b-a}(x-a)\right]_a^b - \frac{1}{n\pi}\int_a^b f'(x)\sin\frac{2n\pi}{b-a}(x-a)\,dx \\
&= -\frac{1}{n\pi}\int_a^b f'(x)\sin\frac{2n\pi}{b-a}(x-a)\,dx \\
b_n &= -\frac{1}{n\pi}\{f(b)-f(a)\} + \frac{1}{n\pi}\int_a^b f'(x)\cos\frac{2n\pi}{b-a}(x-a)\,dx
\end{aligned} \tag{6-2-12}$$

閉区間 $a \leq x \leq b$ で $f'(x)$ は有界であるので，

$$|f'(x)| \leq K$$

と書くと，

$$|a_n| \leq \frac{1}{n\pi}\int_a^b K\,dx = \frac{1}{n}\frac{K(b-a)}{\pi}$$

同様に

$$|b_n| \leq \frac{1}{n}\frac{K(b-a)}{\pi} + \frac{1}{n}\frac{|f(b)-f(a)|}{\pi}$$

となり，一方，両端を除く開区間 $a < x < b$ において，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{2n\pi}{b-a}(x-a) \quad \text{および} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{2n\pi}{b-a}(x-a)$$

は有界である(2章 例2-3，両端において前者のみ発散する)．ゆえに定理5-4 ($g_k(x)$ として $1/k$ をとる)により，有界な導関数をもつフーリエ級数(6-2-10)は，両端を含まない区間 $a < c \leq x \leq d < b$ において一様収束する．

次に，関数 $f(x)$ が上記の条件(有界な導関数をもつ)に加え，関数値の周期的境界条件 $f(b) = f(a)$ を満足する場合を考える．そのとき，式(6-2-12)のフーリエ係数 $\{a_n, b_n\}$ のうち，a_n は変わらないが，b_n は第1項が消え，

$$b_n = \frac{1}{n\pi}\int_a^b f'(x)\cos\frac{2n\pi}{b-a}(x-a)\,dx \tag{6-2-12$'$}$$

となる．

ここで，次のベッセルの不等式を用いる．

定理 6-8　ベッセルの不等式　区間 $a \leq x \leq b$ において連続な関数 $f(x)$ とそのフーリエ級数(6-2-10)に関して，ベッセルの不等式

$$\frac{2}{b-a}\int_a^b \{f(x)\}^2\,dx \geq \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2$$

が成立する．

証明)

$$\frac{2}{b-a}\int_a^b \left[f(x) - \left\{a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos\frac{2k\pi}{b-a}(x-a) + \sum_{k=1}^{n} b_k\sin\frac{2k\pi}{b-a}(x-a)\right\}\right]^2 dx \geq 0$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}\frac{2}{b-a}\int_a^b \{f(x)\}^2 \geq{}& \frac{2}{b-a}\int_a^b 2f(x)\left\{a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos\frac{2k\pi}{b-a}(x-a) + \sum_{k=1}^{n} b_k\sin\frac{2k\pi}{b-a}(x-a)\right\}dx\\ &- \frac{2}{b-a}\int_a^b \left\{a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos\frac{2k\pi}{b-a}(x-a) + \sum_{k=1}^{n} b_k\sin\frac{2k\pi}{b-a}(x-a)\right\}^2 dx\\ ={}& \sum_{k=0}^{n} a_k^2 + \sum_{k=1}^{n} b_k^2\end{aligned}$$

左辺は有界であるから，$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2$ は収束し，

$$\frac{2}{b-a}\int_a^b \{f(x)\}^2\,dx \geq \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2$$

が成立する．

さて，導関数 $f'(x)$ のフーリエ級数を $\{\tilde{a}_n, \tilde{b}_n\}$ と書くことにすると，式(6-2-12, 12′)により，

$$a_n = -\frac{b-a}{2n\pi}\tilde{b}_n, \qquad b_n = \frac{b-a}{2n\pi}\tilde{a}_n$$

を得る．このとき，フーリエ級数 (6-2-10) の各項の絶対値は

$$\left|a_n \cos\frac{2n\pi}{b-a}\right| \le |a_n| = \left|\frac{b-a}{2\pi}\frac{\tilde{b}_n}{n}\right| \le \left|\frac{b-a}{4\pi}\right|\left(\tilde{b}_n^2 + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\left|b_n \sin\frac{2n\pi}{b-a}\right| \le |b_n| = \left|\frac{b-a}{2\pi}\frac{\tilde{a}_n}{n}\right| \le \left|\frac{b-a}{4\pi}\right|\left(\tilde{a}_n^2 + \frac{1}{n^2}\right)$$

となる．右辺のうち，$\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{a}_n^2$, $\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{b}_n^2$ は定理 6-8（ベッセルの不等式）により収束し，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ も収束するので，定理 5-2 により，有界な導関数をもち，かつ関数値の周期的境界条件を満足する関数 $f(x)$ のフーリエ級数 (6-2-10) は，全区間 $a \le x \le b$ において一様収束する．

■ **[一様収束するフーリエ級数 (6-2-10) は $f(x)$ に収束する]**

フーリエ級数 (6-2-10) の第 N 部分和を

$$S_N(x) \equiv a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos\frac{2n\pi}{b-a}(x-a) + \sum_{n=1}^{N} b_n \sin\frac{2n\pi}{b-a}(x-a)$$

と定義し，そのフーリエ係数に式 (6-2-9) を代入すると，

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \frac{2}{b-a}\int_a^b f(t)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N}\cos\frac{2n\pi}{b-a}(t-a)\cos\frac{2n\pi}{b-a}(x-a)\right. \\ &\qquad \left. + \sum_{n=1}^{N}\sin\frac{2n\pi}{b-a}(t-a)\sin\frac{2n\pi}{b-a}(x-a)\right\}dt \\ &= \frac{2}{b-a}\int_a^b f(t)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N}\cos\frac{2n\pi}{b-a}(t-x)\right\}dt \end{aligned} \tag{6-2-13}$$

を得る．

2 章 例 2-3 の結果の一つ

$$\sum_{n=1}^{N}\cos\frac{2n\pi}{b-a}(t-x) = \frac{\cos\dfrac{(N+1)\pi}{b-a}(t-x)\sin\dfrac{N\pi}{b-a}(t-x)}{\sin\dfrac{\pi}{b-a}(t-x)} \tag{6-2-14}$$

を用いると[†3]，

---

†3　$t-x=0,\ b-a$ のとき，$\sum_{n=1}^{N}\cos\frac{2n\pi}{b-a}(t-x) = N$ となるが，これは式 (6-2-14) で $t-x \to 0$ または $t-x \to b-a$ とした式に一致する．

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos \frac{2n\pi}{b-a}(t-x) = \frac{\sin \frac{\pi}{b-a}(t-x) + 2\cos \frac{(N+1)\pi}{b-a}(t-x) \sin \frac{N\pi}{b-a}(t-x)}{2\sin \frac{\pi}{b-a}(t-x)}$$

$$= \frac{\sin \frac{(2N+1)\pi}{b-a}(t-x)}{2\sin \frac{\pi}{b-a}(t-x)}$$

を得るので，これを式 (6-2-13) に代入すると，

$$S_N(x) = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(t) \frac{\sin \frac{(2N+1)\pi}{b-a}(t-x)}{2\sin \frac{\pi}{b-a}(t-x)} dt \qquad (6\text{-}2\text{-}15)$$

を得る．被積分関数のうち

$$\frac{\sin \frac{(2N+1)\pi}{b-a}(t-x)}{2\sin \frac{\pi}{b-a}(t-x)} \qquad (6\text{-}2\text{-}16)$$

は，$N \to \infty$ の極限で急速に振動するので（図 6-6 $N = 10, 100$），分母が 0 になる $t = x$ 付近を除き積分に寄与しない（リーマン - ルベーグの定理[12]）．

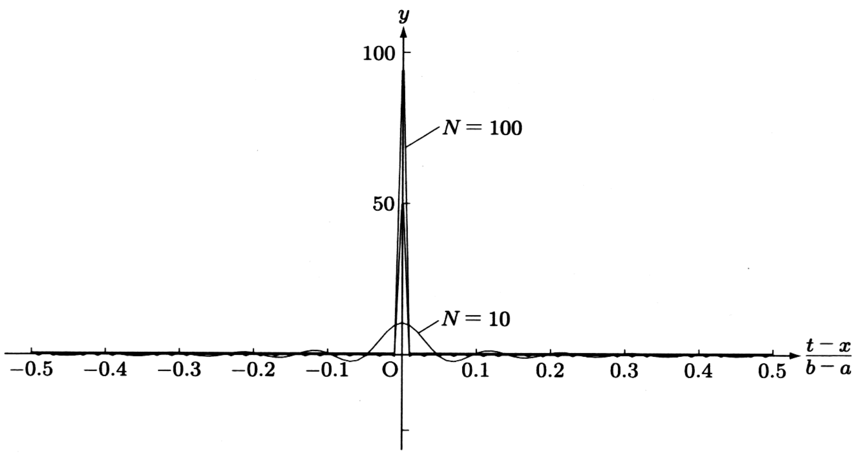


図 6-6　関数 (6-2-16)

実際，式 (6-2-15) の右辺を部分積分すると，

$$S_N(x) = \frac{2}{b-a} \int_a^b \frac{f(t)}{2\sin \frac{\pi}{b-a}(t-x)} \sin \frac{(2N+1)\pi}{b-a}(t-x)\, dt$$

$$= -\frac{2}{(2N+1)\pi}\left[\frac{f(t)}{2\sin\dfrac{\pi}{b-a}(t-x)}\cos\frac{(2N+1)\pi}{b-a}(t-x)\right]_a^b$$

$$+\frac{2}{(2N+1)\pi}\int_a^b \frac{d}{dt}\left\{\frac{f(t)}{2\sin\dfrac{\pi}{b-a}(t-x)}\right\}\cos\frac{(2N+1)\pi}{b-a}(t-x)\,dt$$

となり，最終式の積分中の関数 $\dfrac{d}{dt}\left\{\dfrac{f(t)}{2\sin\dfrac{\pi}{b-a}(t-x)}\right\}$ が有界であれば，$S_N(x) = O(1/N)$ となり，$N \to \infty$ の極限で 0 に収束する．

したがって，関数 (6-2-16) は $N \to \infty$ の極限で $t = x$ 近傍（その区間幅は $N \to \infty$ の極限で 0 に収束する）を除いて積分 (6-2-15) に寄与しない．そこで，式 (6-2-15) の $f(x)$ に $f(x) = 1$ を代入すると，式 (6-2-9) より $a_0 = 1$，その他の a_n, b_n はすべて 0，すなわち $S_N(x) = 1$ であるので，

$$1 = \frac{2}{b-a}\int_a^b \frac{\sin\dfrac{(2N+1)\pi}{b-a}(t-x)}{2\sin\dfrac{\pi}{b-a}(t-x)}\,dt$$

となる．以上の考察を総合すると，$N \to \infty$ の極限で関数 (6-2-16) はディラックのデルタ関数 $\delta(t-x)$ の $(b-a)/2$ 倍となることがわかる（5-3 節）．すなわち，

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\sin\dfrac{(2N+1)\pi}{b-a}(t-x)}{2\sin\dfrac{\pi}{b-a}(t-x)} = \frac{b-a}{2}\delta(t-x)$$

を得る．これを式 (6-2-15) に代入し $N \to \infty$ の極限をとると，フーリエ級数 (6-2-10) が一様収束するとき積分と極限の順序を入れ替えることができ，

$$\lim_{N\to\infty} S_N(x) = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(t)\lim_{N\to\infty}\frac{\sin\dfrac{(2N+1)\pi}{b-a}(t-x)}{2\sin\dfrac{\pi}{b-a}(t-x)}\,dt = \int_a^b f(t)\delta(t-x)\,dt = f(x)$$

すなわち，ある区間で一様収束するフーリエ級数は，その区間でもとの関数 $f(x)$ に収束する．したがって，次の二つの定理を得る．

定理 6-9　連続かつ導関数が有界である関数　区間 $a \le x \le b$ において連続，かつその導関数が有界である関数 $f(x)$ のフーリエ級数 (6-2-10) は，区間の両端点 a, b の近傍を含まない区間 $a < c \le x \le d < b$ において，もとの関数 $f(x)$ に一様収束する．

定理 6-10　連続かつ導関数が有界であり，関数値の周期的境界条件を満たす関数
区間 $a \leq x \leq b$ において連続，かつその導関数が有界であり，関数値の周期的境界条件を満たす関数 $f(x)$ のフーリエ級数 (6-2-10) は，区間 $a \leq x \leq b$ 全体にわたり，もとの関数 $f(x)$ に一様収束する．

例 6-4　周期的境界条件を満たす連続関数のフーリエ級数展開

図 6-7 は，周期的境界条件 (6-1-22) を満たす連続関数 $f(x)$ と，その有限フーリエ級数を比較したものである．定理 6-10 により，フーリエ級数は全区間で $f(x)$ に一様収束するので，フーリエ級数の $N = 4$ 程度の部分和で，十分よくもとの関数を近似している(図 6-7)． ■

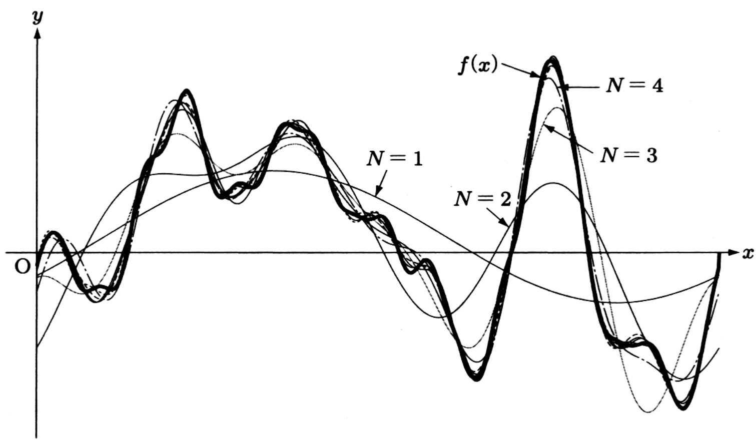


図 6-7　周期的境界条件を満たす連続関数と，その有限フーリエ級数

例 6-5　関数値の周期的境界条件を満たすが，導関数の周期的境界条件を満たさない連続関数のフーリエ級数展開：放物線の一部

放物線と三角関数では類似性に乏しいので，放物線をフーリエ級数で表現するためにはかなり多くの項数を必要とするように想像される．しかし，定理 6-10 によれば，この例のフーリエ級数は両端を含む全区間でもとの関数(放物線)に一様収束するので，フーリエ級数の N =3 程度の部分和で，両端のごく近傍を除けば，十分よくもとの関数を近似している．ただ，導関数の周期的境界条件を満たさないために，両端付近で収束が緩慢であり，微係数の値はもとの関数と異なる値をもつ(図 6-8)． ■

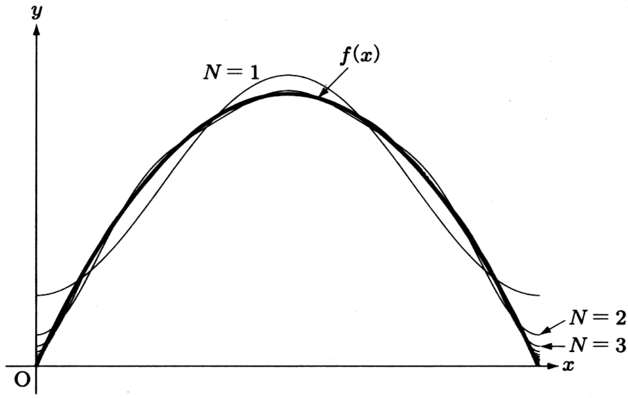


図 6-8　放物線の一部とその有限フーリエ級数

例 6-6　関数値の周期的境界条件を満たすが，導関数は区間内の 1 点で定義できず，かつ周期的境界条件を満たさない連続関数のフーリエ級数展開：折れ線

折れ線のようになめらかでない関数の場合にも，定理 6-10 が示すように，フーリエ級数の $N=3$ 程度の部分和で，収束が緩慢な両端と折れ曲がり点近傍を除き十分よくもとの関数を近似している．しかし，導関数の周期的境界条件を満たさない両端付近および不連続点付近における微係数は，級数ともとの関数で異なる（図 6-9）．■

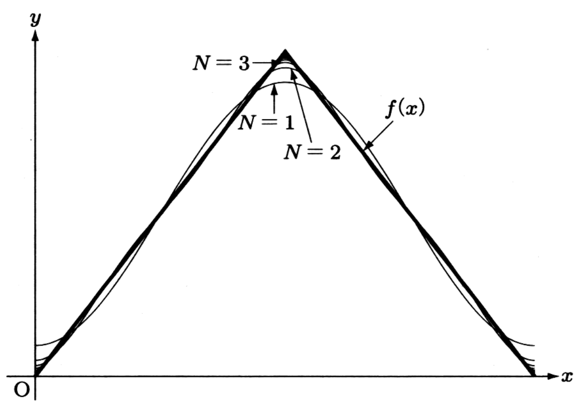


図 6-9　折れ線とその有限フーリエ級数

■ 6-2-3　関数値の周期的境界条件を満たさない連続関数のフーリエ級数展開

区間 $a \le x \le b$ の両端点における関数の値が等しくない場合，すなわち関数値の周期的境界条件を満たさない連続関数 $f(x)$ $(f(a) \neq f(b))$ のフーリエ級数展開を考える．

フーリエ級数展開は，周期的境界条件を課したシュトゥルム - リゥヴィル問題の固有関数である正規直交関数列・三角関数による級数関数 $f(x)$ の無限級数表示であるから，級数展開される関数 $f(x)$ は，元来周期的境界条件 $f(a) = f(b)$ を満足しなければならない(定理 6-10)．では，周期的境界条件を満たさない連続関数 $f(x)$ をあえてフーリエ級数展開すると，すなわち，式 (6-2-9′) により算出したフーリエ係数をもつ級数 (6-2-10′) をつくったとき，その級数はもとの関数に収束するだろうか．その答は否である．なぜなら，任意のフーリエ係数をもつフーリエ級数は周期的境界条件 $f(a) = f(b)$（かつ $f'(a) = f'(b)$）を満足するからである．したがって，関数値の周期的境界条件を満たさない関数 $f(x)$ から作成したフーリエ級数は，周期的境界条件 $g(a) = g(b)$（かつ $g'(a) = g'(b)$）を満足する，ある別の関数 $g(x)$ のフーリエ級数に一致しているはずである．つまり，$f(x)$ と $g(x)$ は積分 (6-2-9′) により同一のフーリエ係数を生み出すが，区間の端点 a, b においてのみ，異なる値をとるはずである．

例 6-7　関数値の周期的境界条件を満たさない「連続」関数のフーリエ級数展開：直線

5-4 節 例 5-15 で $\theta = \pi - x$ とおくと，区間 $-\pi < x < \pi$ において，関数 $y = x/2$ は

$$\frac{1}{2}x = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n} = \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 5x}{5} - \cdots \qquad (6\text{-}2\text{-}17)$$

と級数展開され，$-\pi < x < \pi$ に含まれる閉区間において右辺の級数は左辺の 1 次関数 $y = x/2$ に一様収束する．これはまさに，関数 $y = x/2$ から区間 $-\pi \le x \le \pi$ における積分 (6-2-9) により算出されたフーリエ係数を有する，関数 $y = x/2$ のフーリエ級数展開である．その式 (6-2-17) 右辺のフーリエ級数が表す関数 $g(x)$ は，周期的境界条件

$$g(a) = g(b) = 0, \qquad g'(a) = g'(b)$$

を満足するが，区間 $-\pi \le x \le \pi$ の両端点以外の開区間 $-\pi < x < \pi$ においては，$y = x/2$ に収束する関数である．

関数 $y = \dfrac{1}{2}x$ は関数値の周期的境界条件を満たさないので，両端点 $x = -\pi, \pi$ の近傍を含む区間において一様収束しない(定理 6-9)．図 6-10 は，$N = 1$～10 の部分和のグラフであり，図 6-11 は，$N = 10$～100 の部分和のグラフである．連続関数である三角関数の有限級数が両端点で不連続な関数を表現しようとする姿は，黙々と仕事に励むハタラキアリの健気な姿を連想させる．

しかし，三角関数の有限級数は項数 N を大きくしてゆくと，両端付近における立ち

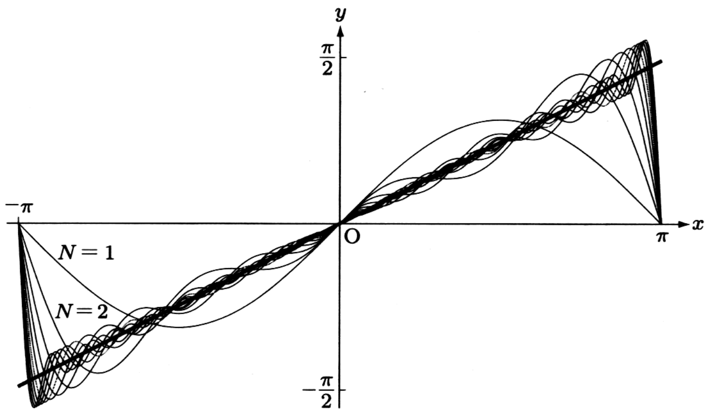


図 6-10　$y=\frac{1}{2}x$ とその有限フーリエ級数 $N=1\sim10$

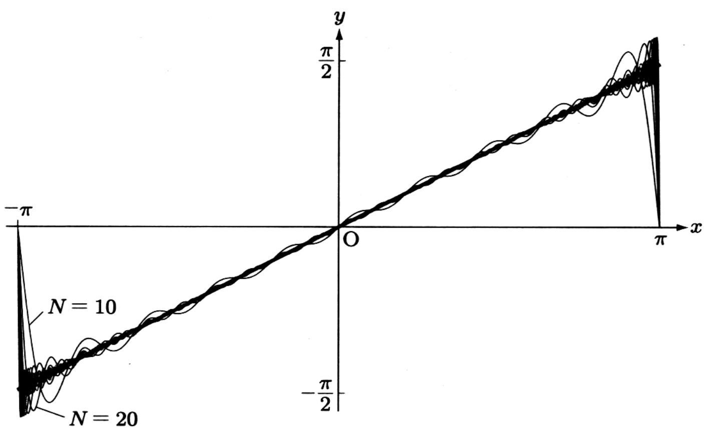


図 6-11　$y=\frac{1}{2}x$ とその有限フーリエ級数 $N=10\sim100$

上がりがどんどん激しくなり，もとの関数値からどんどん離れてゆく．この現象をギブス(Gibbs)現象と呼ぶ．■

例 6-8　関数値の周期的境界条件を満たさない「連続」関数のフーリエ級数展開(一般論)

例 6-7 はそのフーリエ級数があらかじめ明らかになっていたが，ここでは周期的境界条件を満たさない任意の「連続」関数 $f(x)$ を考える(図 6-12)．

まず，区間 $a\le x\le b$ の両端点における，関数 $f(x)$ (図 6-13：太実線) の値の食い違い $f(b)-f(a)$ を区間幅 $b-a$ で割ったものにマイナスをかけたものを勾配とし，$x=\dfrac{a+b}{2}$

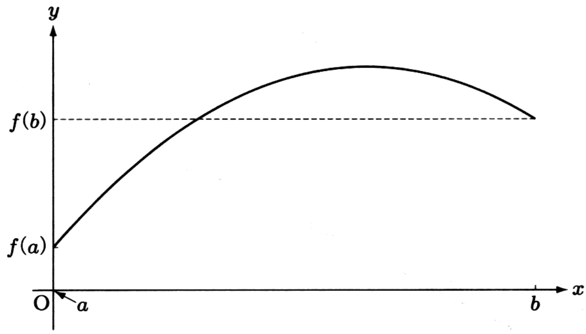


図 6-12　周期的境界条件を満たさない連続関数 $f(x)$

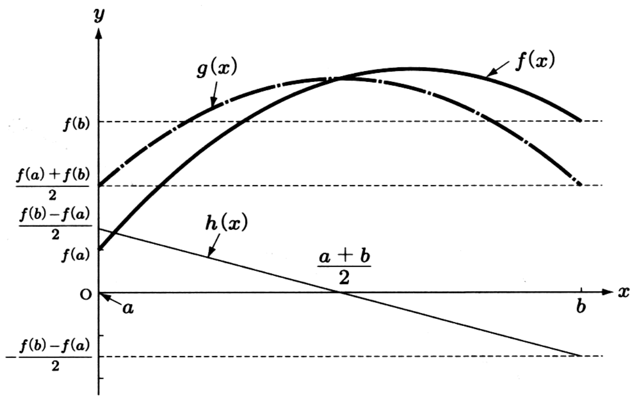


図 6-13　$h(x)$ と $g(x)$

で 0 の値をとる 1 次関数(図 6-13：細実線)

$$h(x) \equiv -\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)$$

を導入する．これは例 6-7 の 1 次関数 (6-2-17) を拡大(縮小)および平行移動したものであるから，そのフーリエ級数は既知である．

$$h(x) = -\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right) = -2\frac{f(b)-f(a)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin\frac{2n\pi}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)$$

$$= -2\frac{f(b)-f(a)}{\pi}\left\{\sin\frac{2\pi}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{2}\sin\frac{4\pi}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3}\sin\frac{6\pi}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)-\cdots\right\}$$

$$-\frac{b-a}{2} < x - \frac{a+b}{2} < \frac{b-a}{2} \quad \text{すなわち} \quad a < x < b \tag{6-2-18}$$

この 1 次関数 $h(x)$ を関数 $f(x)$ に加えた関数 $g(x)$（図 6-13：一点鎖線）

$$g(x) \equiv f(x) + h(x) \tag{6-2-19}$$

は，関数値の周期的境界条件 $g(b) = g(a)\left(= \dfrac{f(a)+f(b)}{2}\right)$ を満足する連続関数であるから，定理 6-10 によりそのフーリエ級数は関数 $g(x)$ に区間 $a \leq x \leq b$ 全体で一様収束する．

フーリエ係数の算出 (6-2-9) は線形演算であるから，式 (6-2-19) 右辺のフーリエ級数は，関数 $f(x)$ のフーリエ級数と関数 $h(x)$ のフーリエ級数の和であり，区間 $a \leq x \leq b$ の両端点近傍以外の区間 $a < c \leq x \leq d < b$ においては，関数 $f(x) + h(x)$ に一様収束する．そして，関数 $h(x)$ のフーリエ級数（式 (6-2-18) 右辺）は両端点 $x = a, b$ で 0 となる．ゆえに，関数 $f(x)$ のフーリエ級数は両端点 $x = a, b$ で $g(b) = g(a)\left(= \dfrac{f(a)+f(b)}{2}\right)$ に収束する．

つまり，周期的境界条件を満たさない連続関数 $f(x)$ をフーリエ級数展開すると，得られたフーリエ級数は両端点近傍を含まない区間ではもとの関数 $f(x)$ に一様収束し，両端点ではもとの関数 $f(x)$ の両端点における値の平均 $\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$ に収束する．したがって，定理 6-11 を得る．

> **定理 6-11　連続かつ導関数が有界であり，関数値の周期的境界条件を満たさない関数**　区間 $a \leq x \leq b$ において連続，かつその導関数が有界であるが，関数値の周期的境界条件を満たさない関数 $f(x)$ のフーリエ級数 (6-2-10) は，区間の両端点 a, b の近傍を含まない区間 $a < c \leq x \leq d < b$ において，もとの関数 $f(x)$ に一様収束し，両端点 a, b においては，$\{f(a) + f(b)\}/2$ に収束する．

なお，タイトルで「連続」関数とカッコを挿入したのは，もともと連続関数であったものをフーリエ級数展開すると，両端点で不連続になることを意味したものである．

関数 $f(x)$ のフーリエ級数（図 6-14）は，周期 $b - a$ の正弦（余弦）関数による展開である．したがって，フーリエ級数自体は，区間 $a \leq x \leq b$ の外側において区間内の波形を繰り返す周期関数を表現する（図 6-15）．■

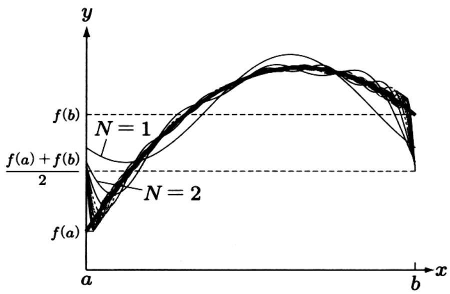


図 6-14　関数 $f(x)$（図 6-12）とその有限フーリエ級数

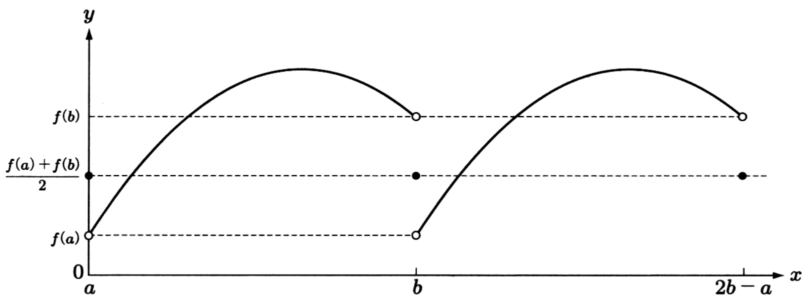


図 6-15　関数 $f(x)$ のフーリエ級数が表す関数

■ 6-2-4　不連続点を有する（関数値の周期的境界条件を満足する）関数のフーリエ級数展開

次に，区間 $a \leq x \leq b$ において関数値の周期的境界条件を満足するが，内点 c で不連続な関数 $\tilde{f}(x)$ を考える（図 6-16）．

$$y = \tilde{f}(x), \qquad \tilde{f}(a) = \tilde{f}(b), \qquad \lim_{x \to c-0} \tilde{f}(x) = \alpha, \qquad \lim_{x \to c+0} \tilde{f}(x) = \beta \, (\neq \alpha)$$

前項最後に注意したように，区間 $a \leq x \leq b$ で定義された関数 $\tilde{f}(x)$（図 6-16）のフーリエ級数展開は，区間 $a \leq x \leq b$ の外側において区間内の波形を繰り返す周期関数を表現する（図 6-17）．ゆえに，関数 $\tilde{f}(x)$ を x 軸の負の方向に $c - a$ 平行移動した関数 $\tilde{f}(x - a + c)$ は，区間 $a \leq x \leq b$ の両端点での値が一致しない連続関数であり，前項で考察した関数に該当する．

したがって，区間 $a \leq x \leq b$ の内点 c で不連続な関数 $\tilde{f}(x)$ もまたフーリエ級数展開が可能であり，不連続点 c の近傍を除く区間でもとの関数 $\tilde{f}(x)$ に一様収束し，不連続点 c はもとの関数 $\tilde{f}(x)$ の左右からの極限値の平均 $\dfrac{\alpha + \beta}{2}$ に収束する（図 6-18）．したがって，定理 6-12 を得る．

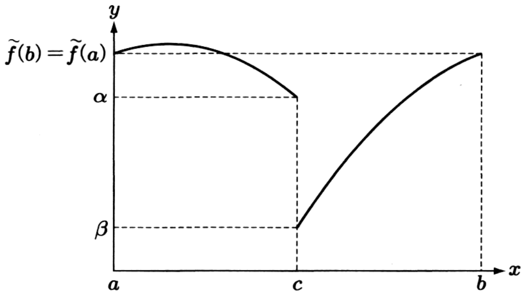


図 6-16 内点 c で不連続な関数 $\tilde{f}(x)$

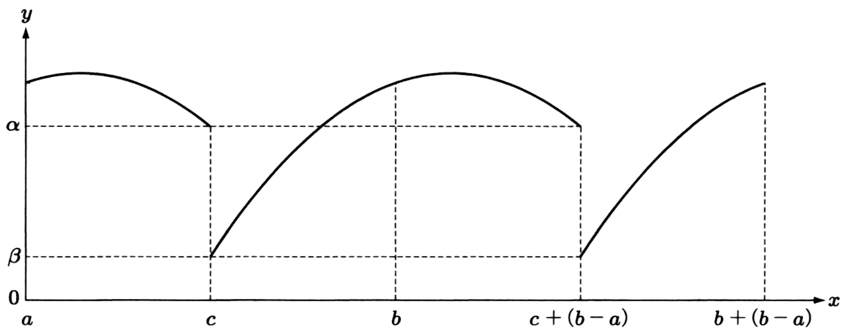


図 6-17 $\tilde{f}(x)$ のフーリエ展開が表現する関数

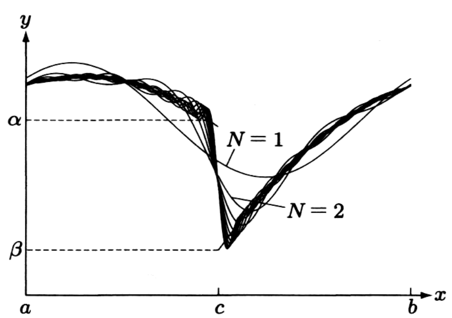


図 6-18 $\tilde{f}(x)$ のフーリエ級数の不連続点付近での振る舞い

定理 6-12　区分的に連続かつ導関数が有界である関数　区間 $a \le x \le b$ において区分的に連続，かつ導関数が有界である関数 $f(x)$ のフーリエ級数 (6-2-10) は，不連続点の近傍を含まない区間において，もとの関数 $f(x)$ に一様収束し，不連続点 c においては，$\{f(c-0)+f(c+0)\}/2$ に収束する．

6-3　フーリエ変換・フーリエ積分

区間 $a \le x \le b$ 内で連続であり，周期的境界条件 (6-1-22) を満たす関数 $f(x)$ のフーリエ級数展開は，

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2n\pi}{b-a}(x-a) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{2n\pi}{b-a}(x-a) \qquad \text{(6-2-10 再掲)}$$

であり，そのフーリエ係数は

$$a_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{b-a}}c_0 = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$a_n \equiv \sqrt{\frac{2}{b-a}}c_{2n} = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{2n\pi}{b-a}(x-a)\,dx$$

$$b_n \equiv \sqrt{\frac{2}{b-a}}c_{2n-1} = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\frac{2n\pi}{b-a}(x-a)\,dx \qquad \text{(6-2-9 再掲)}$$

であった．

フーリエ級数展開式(式 (6-2-10) 右辺)の三角関数は，x の実数値全体 $(-\infty < x < \infty)$ を定義域とする周期 $(b-a)$ の周期関数である．したがって，フーリエ級数展開は，有限区間で定義された周期的境界条件を満たす関数，ないし有限な周期をもつ周期関数に有効である．

上記の適用条件を満たさない関数，すなわち x の実数値全体 $(-\infty < x < \infty)$ を定義域とする，周期をもたない関数を対象とするためには，有限区間 $a \le x \le b$ 内で定義されたフーリエ級数展開の区間長 $b-a$ を無限大に伸ばす極限をとる必要がある．

そこで，後に無限大に拡大するため当初自由に設定することのできる区間 $a \le x \le b$ を $-T/2 \le x \le T/2$ (T : 周期) とした式 (6-2-10′) を出発点とする．

$$f(x) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt + \frac{2}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)dt\cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right)$$
$$+\frac{2}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)dt\sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) \qquad \text{(6-2-10′ 再掲)}$$

ここで

$$k_n \equiv \frac{2\pi n}{T}, \qquad \Delta k \equiv k_{n+1} - k_n = \frac{2\pi}{T}$$

とおくと，式 (6-2-10′) は

$$f(x) = \frac{\Delta k}{2\pi}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt + \frac{\Delta k}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(k_n t)\,dt\cos(k_n x)$$
$$+ \frac{\Delta k}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(k_n t)\,dt\sin(k_n x) \tag{6-3-1}$$

となる．

次に，区間長 $T \to +\infty$ の極限をとるが，これは $\Delta k \to 0+$ の極限でもある．関数 $f(x)$ が $-\infty < x < \infty$ において絶対積分可能であるならば，すなわち，

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx$$

が有界であれば，式 (6-3-1) 右辺第 1 項は $\Delta k \to 0+$ の極限で消え，また定理 5-2 により次の積分が存在する（有界である）．

$$C(k_n) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(k_n t)\,dt$$
$$S(k_n) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(k_n t)\,dt \tag{6-3-2}$$

これらを用いて式 (6-3-1) の $T \to +\infty$ $(\Delta k \to 0+)$ の極限をとると，離散変数 k_n は連続変数 k となり，

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} C(k)\cos(kx)\,dk + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} S(k)\sin(kx)\,dk \tag{6-3-3}$$

を得る．式 (6-3-3) が関数 $f(x)$ の**フーリエ積分**表示である．

さらに，三角関数を複素指数関数

$$\cos(kx) = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}$$
$$\sin(kx) = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$$

で表すと，フーリエ積分 (6-3-3) は

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} C(k)(e^{ikx} + e^{-ikx})dk + \frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty} S(k)(e^{ikx} - e^{-ikx})\,dk$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\{C(k) - iS(k)\}e^{ikx}\,dk + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\{C(k) + iS(k)\}e^{-ikx}\,dk$$

となる．ここで，第 2 の積分において $k = -k'$ と変数変換すると，

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\{C(k) - iS(k)\}e^{ikx}\,dk + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}\{C(-k') + iS(-k')\}e^{ik'x}\,dk'$$

を得る．ここで

$$\tilde{f}(k) \equiv \begin{cases} C(k) - iS(k) & (k \geq 0) \\ C(-k) + iS(-k) & (k < 0) \end{cases} \tag{6-3-4}$$

を定義すると，最終的に

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(k)e^{ikx}\,dk \tag{6-3-5}$$

を得る．式 (6-3-4) で定義された $\tilde{f}(k)$ は，変数 x が長さを表すとき波数 k の，また変数 x が時間を表すとき角振動数 k の成分の複素振幅である．

式 (6-3-2, 4) により

$$\tilde{f}(k) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(kx)\,dx - i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(kx)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\,dx & (k \geq 0) \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(-kx)\,dx + i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(-kx)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\,dx & (k < 0) \end{cases}$$

となるので，式 (6-3-5) と対称的な式

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\,dx \qquad (-\infty < k < \infty) \tag{6-3-6}$$

を得る．

式 (6-3-6) により $\tilde{f}(k)$ を得る操作をフーリエ変換する，といい，$\tilde{f}(k)$ を関数 $f(x)$ の**フーリエ変換**(Fourier transform)と呼ぶ．また，$f(x)$ を得る操作 (6-3-5) を**フーリエ逆変換**(inverse Fourier transform)と呼ぶ．

フーリエ変換は，3 変数(3 次元ベクトル) $\boldsymbol{r} = (x, y, z)^T$ の関数 $f(\boldsymbol{r}) = f(x, y, z)$ の 3 次元フーリエ変換に容易に拡張することができる．すなわち，3 次元フーリエ変換は

$$\tilde{f}(\boldsymbol{k}) = \int f(\boldsymbol{r})\exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})d\boldsymbol{r}, \qquad \boldsymbol{k} = (k_x, k_y, k_z)^T$$

あるいは

$$\tilde{f}(k_x, k_y, k_z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z)\exp -i(k_x x + k_y y + k_z z)\,dxdydz$$

であり，3 次元フーリエ逆変換は

$$f(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \tilde{f}(\boldsymbol{k})\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})d\boldsymbol{k}$$

あるいは

$$f(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(k_x, k_y, k_z)\exp i(k_x x + k_y y + k_z z)\,dk_x dk_y dk_z$$

である．

フーリエ変換はフーリエ級数の区間長を無限大に拡大したものであるから，両者はよい対応をみせる．フーリエ変換

$$\tilde{f}(k) \equiv \begin{cases} C(k) - iS(k) & (k \geq 0) \\ C(-k) + iS(-k) & (k < 0) \end{cases} \qquad \text{(6-3-4 再掲)}$$

は関数 $f(x)$ の複素振幅であり，その実部 $C(k)$ および虚部 $S(k)$

$$C(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(kx)\,dx$$

$$S(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(kx)\,dx \qquad \text{(6-3-2 再掲)}$$

は，それぞれフーリエ級数の余弦関数および正弦関数の振幅

$$a_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{2n\pi}{b-a}(x-a)\,dx$$

$$b_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\frac{2n\pi}{b-a}(x-a)\,dx \qquad \text{(6-2-9 再掲)}$$

に対応している．ただし，フーリエ級数の振幅 a_n, b_n はもとの関数 $f(x)$ と同じ次元をもつのに対して，フーリエ変換 $\tilde{f}(k)$ は $f(x)$ と変数 x の積の次元になっていることに注意しなければならない．したがって，純粋な正弦波

$$y = \sin\frac{2m\pi}{b-a}(x-a)$$

のフーリエ級数は，当然ながら

$$b_m = 1, \qquad a_n = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots), \qquad b_n = 0 \quad (n \neq m)$$

であるが，そのフーリエ変換は

$$\tilde{f}(k) = 2\pi\delta(k-m)$$

である（演習問題 6-5 参照）．

フーリエ変換 $\tilde{f}(k)$ そのものあるいはその絶対値の 2 乗を**スペクトル**と呼ぶが，このデルタ関数型のスペクトルは**線スペクトル**と呼ばれる．

6-4　フーリエ級数・フーリエ変換の応用

6-4-1　微分方程式の解法

フーリエ級数は当初，フーリエ（Fourier, 1768-1830）により熱伝導方程式を解く手段として開発された．したがって，フーリエ級数およびその他の一般の固有関数展開（式(6-1-45)）は，微分方程式の基本的解法の一つである．

たとえば，定数係数をもつ線形非斉次 n 階常微分方程式

$$\frac{d^n y(x)}{dx^n} + p_{n-1}\frac{d^{n-1}y(x)}{dx^{n-1}} + \cdots + p_2\frac{d^2y(x)}{dx^2} + p_1\frac{dy(x)}{dx} + p_0 y(x) = r(x) \tag{6-4-1}$$

の区間 $a \le x \le b$ における周期的境界条件

$$y(a) = y(b), \qquad y'(a) = y'(b)$$

を満たす解を，解 $y(x)$ と非斉次項 $r(x)$ をそれぞれフーリエ級数展開することにより容易に得ることができる．ここでは簡潔な表式の複素フーリエ級数

$$y(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k \exp i\frac{2k\pi}{b-a}(x-a)$$

$$r(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_k \exp i\frac{2k\pi}{b-a}(x-a) \tag{6-4-2}$$

を用いる．

周期的境界条件を満たす連続微分可能なフーリエ級数は，定理 6-10 により全区間 $a \le x \le b$ で一様収束するので，定理 5-8 により項別微分可能である．ゆえに，式 (6-4-2) を式 (6-4-1) に代入し，項別に微分すると

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\left\{\sum_{m=0}^{n} p_m\left(i\frac{2k\pi}{b-a}\right)^m\right\} y_k \exp i\frac{2k\pi}{b-a}(x-a)\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_k \exp i\frac{2k\pi}{b-a}(x-a)$$

となるので，ただちにフーリエ級数解

$$y(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{r_k}{\sum_{m=0}^{n} p_m\left(i\dfrac{2k\pi}{b-a}\right)^m} \exp i\frac{2k\pi}{b-a}(x-a)$$

を得る．

例 6-9　**定数係数線形非斉次 2 階常微分方程式**

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - y = \sin^3 x$$

の区間 $-\pi \le x \le \pi$ における周期的境界条件

$$y(-\pi) = y(\pi), \qquad y'(-\pi) = y'(\pi)$$

を満たす解を求める．

解 $y(x)$ と非斉次項 $\sin^3 x$ をそれぞれフーリエ複素級数展開すると，

$$y(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k \exp ik(x+\pi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{y}_k \exp ikx, \qquad \tilde{y}_k = y_k \exp ik\pi = (-1)^k y_k$$

$$\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4} = \frac{3}{8i}(e^{ix} - e^{-ix}) - \frac{1}{8i}(e^{i3x} - e^{-i3x})$$

となり，フーリエ級数解

$$y(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{r_k}{\sum_{m=0}^{n} p_m(ik)^m} \exp ikx$$
$$= \frac{3}{8i}\left(\frac{1}{-2+3i}e^{ix} - \frac{1}{-2-3i}e^{-ix}\right) - \frac{1}{8i}\left(\frac{1}{-10+9i}e^{i3x} - \frac{1}{-10-9i}e^{-i3x}\right)$$
$$= \frac{-9\cos x - 6\sin x}{52} + \frac{9\cos 3x + 10\sin 3x}{724}$$

を得る． ■

フーリエ以前には，単周期の非斉次項(外力)，たとえば

$$r(x) = A\sin x$$

に対応する解は知られていた．フーリエの功績は，任意の外力をフーリエ級数展開し，その各周期（周波数）成分ごとに解を求めそれらを加え合わせることにより，任意の外力に対応する解を求める方法を確立したことである．

さらに，フーリエ級数展開により，フーリエ自身が携わった熱伝導方程式(拡散方程式)

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \kappa\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\right) = 0$$

およびポアッソン方程式（右辺 $r(x) = 0$ の場合，ラプラス方程式）

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = r(x)$$

波動方程式

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\right) = 0$$

など，数理物理学の代表的な線形偏微分方程式の厳密解を得ることができる(演習問題6-6)．また，(特異)摂動法より，複雑な非線形常（偏）微分方程式の高精度近似解を得る際にも，しばしばフーリエ級数型の解を追究する[12]．

■ 6-4-2 時系列データ処理

実用面におけるもっとも重要なフーリエ級数展開の応用は，ランダムな時系列データの解析である．本項では，これまでの変数 x を時間 t と明記し，時系列 $\{f(t)\}$ の区間を $0 \le t \le T$ とする．このとき，フーリエ級数 (6-2-10) および複素フーリエ級数は

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t, \qquad \omega \equiv \frac{2\pi}{T}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp in\omega t$$

$$c_n \equiv \begin{cases} \dfrac{a_n - ib_n}{2} & (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad a_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\,dt \\ \dfrac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} & (n = -1, -2, -3, \cdots) \qquad a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\cos n\omega t\,dt \\ & \qquad\qquad (n = 1, 2, 3, \cdots) \\ a_0 & (n = 0) \qquad b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\sin n\omega t\,dt \\ & \qquad\qquad (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

となる．

■ [基本的統計量]

まず，時系列 $\{f(t)\}$ の区間 $0 \leq t \leq T$ における**平均**(mean)は

$$E\{f(t)\} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt = a_0$$

である．また，時系列 $\{f(t)\}$ の**分散**(variance)は

$$Var\{f(t)\} = \frac{1}{T}\int_0^T \{f(t) - a_0\}^2\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \{f(t)\}^2\,dt - a_0^2$$

である．また，

$$|c_n|^2 = c_n c_n^* = \frac{a_n - ib_n}{2}\frac{a_n + ib_n}{2} = \frac{1}{4}(a_n^2 + b_n^2)$$

は，周波数 $n\omega$ の正弦振動の振幅の 2 乗，すなわち，エネルギーに比例するので，時系列 $\{f(t)\}$ の周波数 $n\omega$ の**エネルギースペクトル**(energy spectra)と呼び，

$$E_n \equiv |c_n|^2 = \frac{1}{4}(a_n^2 + b_n^2)$$

と表す．分散の式に現れた時系列 $\{f(t)\}$ の**二乗平均**

$$\frac{1}{T}\int_0^T \{f(t)\}^2\,dt$$

をフーリエ級数で表すと，

$$\frac{1}{T}\int_0^T \{f(t)\}^2\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \exp(im\omega t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(in\omega t)\right\} dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_m c_n \exp i(m+n)\omega t\right\} dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n c_{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n$$

となり，エネルギースペクトルの総和であることがわかる(**パースヴァル(Parseval)の公式**).

■ [データ取得間隔と最大周波数]

区間 $0 \leq t \leq T$ の時系列 $\{f(t)\}$ に関して実際に取得されるのは，データ取得間隔 Δt ごとに採取された $N+1$ 個の離散的なデータ $\{f(t_k)\}$, $k = 0, 1, 2, \cdots, N$ $(N = T/\Delta t)$ である．このとき，時刻 t による積分は和で置き換えられる．N を偶数としてシンプソン(Simpson)の公式を用いると，たとえば，平均は

$$E\{f(t)\} = a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt \to \frac{1}{6}\left\{f(t_0) + 4\sum_{i=1}^{N/2} f(t_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{N/2-1} f(t_{2i}) + f(t_N)\right\}$$

となる．

また，離散的なデータ $\{f(t_k)\}$ $(k = 0, 1, 2, \cdots, N)$ の表現可能な周波数の最大値 $\omega_{\max}$ および周波数の成分数 $n_{\max}$ は，データ取得間隔 Δt により，

$$\omega_{\max} = n_{\max}\omega = 2\pi f_{\max} = 2\pi\frac{1}{2\Delta t} = \frac{\pi N}{T}$$

$$n_{\max} = \frac{\omega_{\max}}{\omega} = \frac{\pi N}{T}\frac{T}{2\pi} = \frac{N}{2}$$

と定まる．その結果，周波数に関する和は有限級数となる．たとえば，時系列 $\{f(t)\}$ の二乗平均は

$$\frac{1}{T}\int_0^T \{f(t)\}^2\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \to \sum_{n=-n_{\max}}^{n_{\max}} |c_n|^2$$

となる．それゆえ，あらかじめ時系列 $\{f(t)\}$ に含まれる重要な周波数成分を把握し，それが $\omega_{\max}$ を超えないようにデータ取得間隔 Δt を決定する必要がある．

■ [長周期(低周波数)成分の抽出]

時系列データを各周期(周波数)成分すなわちフーリエ成分に分離することは，理論上・応用上きわめて有用である．個々のフーリエ成分・正弦波は，音波においてはある音程の純音波形(音叉の作成する波形)に対応し，光波においては純粋な色調の波形に対応している．太陽光を虹の七色に分解するプリズムは，光学的フーリエ変換機である．しかもこれらの波の支配方程式が線形であるゆえ，個々のフーリエ成分を解析し，その後それらの結果を加え合わせることにより，任意波形の音波ないし光波の解

析を完了することができる．

深海(水深が波長の半分以上)上を進行する海洋波においては，その伝播速度 c が周期 T に比例するので($c = gT/(2\pi)$, g：重力加速度)，波の成分を分離して考察することは重要である．また，港湾内に侵入した海洋波のうち周期のごく長い波である**長周期波**は砕波[†4]による減衰を受けない．そのため，その周期が港湾の形状により定まる固有周期と一致したとき，共振(共鳴)をおこし非常に振幅の大きな波浪となり，船舶の荷役の妨げとなることがあるので，港湾設計に際してはその解析が必要になる．

高層ビルの固有振動数に一致する地震波の長周期成分が共鳴し，地震発生後しばらくの間，高層ビルがユラリユラリと気味悪く揺れるのを経験した読者もあるだろう．また，テレビ・ラジオの各放送局からそれぞれ固有の周波数をもつ電波が送信されており，各家庭ではそれらが重なり合った複雑な波形の電波を受信している．チャンネルを切り替えるという操作は，受信側のテレビ・ラジオの固有周波数を変化させて，視聴することを望む放送局の電波を共振させるという操作，すなわち電気的フーリエ変換である(演習問題 6-7)．

一般の時系列データにおいても，その長周期(低周波数)成分と短周期(高周波数)成分に分離すること，特にその長周期成分を抽出することは実用上きわめて有用である．なぜならば，長周期成分こそが時系列データの長期的傾向・趨勢を示すものであり，短周期成分は長周期成分の上に乗せられた雑音(noise)だからである．

たとえば，ダム貯水池の放流量を管理する指針と具体的方法を考えてみよう．晴天時には上流河川から貯水池への流入量は通常流量であり，正確に予測可能であるため，その時点での貯水量をにらみつつ最適放流量を決定できる．放流量を管理する者の手腕が試されるのは荒天時，特に台風が襲来し大量の降雨が予想される折である．洪水時には上流からの流量を貯水池が引き受け下流への放流量を可能な限り減らすことを期待されているので，その観点からは台風が近づく前に貯水池にたまっている水をあらかじめ放流しておきたい．一方，台風による流入水が予想を下回った場合，台風一過，貯水池はカラッポ，という事態を招いては困る．貯水池の水は上水道・発電・工業・農業等々の用途があり，それぞれ必要量を賄わなければならないからである．そこで，管理者は時々刻々の流入量と貯水量をにらみつつ，放流量を決定しなければならない．

流入量と貯水量はそれぞれ，(複数の)流入河川および貯水池に設置された水位計により決定される．河川の水位と流量にはほぼ一対一の対応関係(関数関係)があり，貯水池水位により貯水量は定まるからである．しかし，特に後者について考えてみると，そ

†4　砕波：海岸付近などで波が白く砕けて消失すること．

れは貯水池の水位が一様であるという仮定に基づいていることがわかる．当該水位計の示す水位記録(時系列)が貯水池全体の水位のその時刻の平均値でないならば，時々刻々変化する水位からダムの貯水量を正確に算出することは望めない．荒天時の水位の時系列には，風や波による短周期の水位変動成分(雑音)が含まれているので，水位の時系列からその長周期成分を抽出する必要が生じる．

株価や為替レートの相場変動データの解析においても，同様の要求が生ずる．時々刻々のあるいは毎日の相場変動が短期的なものなのか，長期的趨勢であるのかを知ることができれば，投資行動に大いに役立つであろう．

これらの目的に資するためには，時系列データをフーリエ級数展開しその長周期成分のはじめの数項を取り出しさえすればよいのではないか，と考えるのは自然である．

以上，時系列データをその長周期成分と短周期成分に分離し，長周期成分を抽出することの重要性を，いくつかの例をあげて説明したが，詳しくみると，諸例における関心事は，

(1) 区間 $0 \leq t \leq T$ 全般にわたる長周期成分の関数形，と

(2) 長周期成分の区間最後の時点 $t = T$ における値，

の 2 種類に分類されることがわかる．

(1) では関心の対象が区間 $0 \leq t \leq T$ 全体の連続な時系列であるから，その両端を除くほとんどの部分は，フーリエ級数展開における一様収束の困難と無縁であるが，(2) では，区間 $0 \leq t \leq T$ の時系列データが途切れた瞬間 $t = T$，すなわち，一般の時系列データにおいては一様収束しない点における長周期成分を抽出するのであるから，格段に難しい作業になる．比喩的に述べるならば，前者が秋口を過ぎてからふり返ってその年の梅雨明け日がいつであったかを決定する作業とするならば，後者は梅雨の末期にその当日が梅雨明け日であることを宣言する，というずっと困難な作業である．

一般的な意味での長周期成分の抽出は (1) であり，通常のフーリエ級数展開によりこの目的は容易に達成できることを以下の諸例で確認できる．一方，最後の 2 例，すなわち貯水池の放流量管理と相場変動データの解析における長周期成分の抽出は (2) であり，一般に (2) の意味での長周期成分の抽出は，(1) のように簡単にはいかない．以下，その実例をみてゆこう．

まず，6-2-2 項の例 6-4「周期的境界条件を満足する連続関数(図 6-7 再掲)」にこの考え方をあてはめてみる．

図 6-19 は例 6-4 の関数のフーリエ級数の基本周波数の 5 倍振動まで ($N = 5$) の長周期成分と，それより高周波数(短周期)成分である．定理 6-10 により，級数は全区間においてもとの関数に一様収束するので，確かに，ゆるやかに変動する長周期成分と t 軸

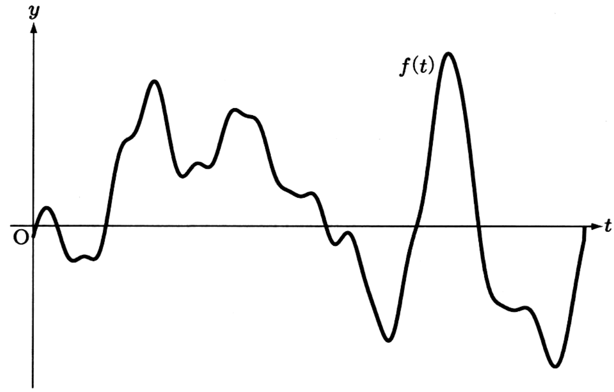


図 6-7　再掲

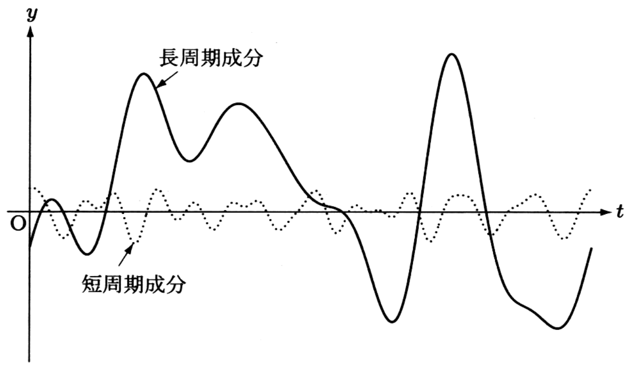


図 6-19　$f(t)$ の長周期成分と短周期成分

の周りに振動する短周期成分(雑音)にきれいに分離されている.

次に, 6-2-3 項の例 6-7「関数値の周期的境界条件を満たさない「連続」関数のフーリエ級数展開：直線」(両端近傍を含む区間で一様収束しないフーリエ級数)を取り上げる(図 6-10 再掲).

図 6-20 は例 6-7 (図 6-10)の関数のフーリエ級数の基本周波数の 5 倍振動まで ($N = 5$) の長周期成分と, それより高周波数(短周期)成分である. この関数(直線)の周期はいわば ∞ であるのに, 高周波数成分が発生している. 特に時系列の最後で本来の関数から大きくずれるギブス現象のために,「過去のある時点から現在までのデータを用いて, 長期的趨勢の現時点での値」を得るという (2) の意味では, 正確に長周期成分を抽出することができない.

それでは, 6-2-2 項の例 6-5「関数値の周期的境界条件を満たすが導関数の周期的境

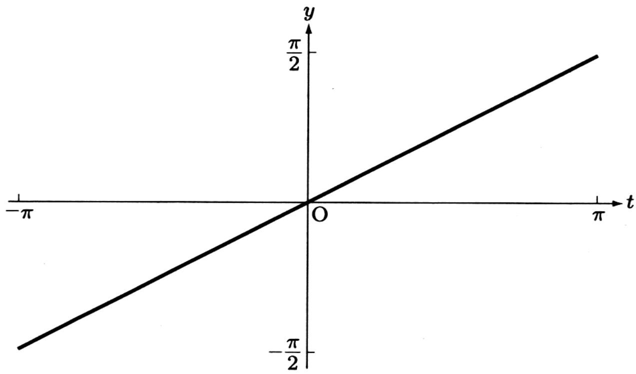


図 6-10 $y = \frac{1}{2}t$（再掲）

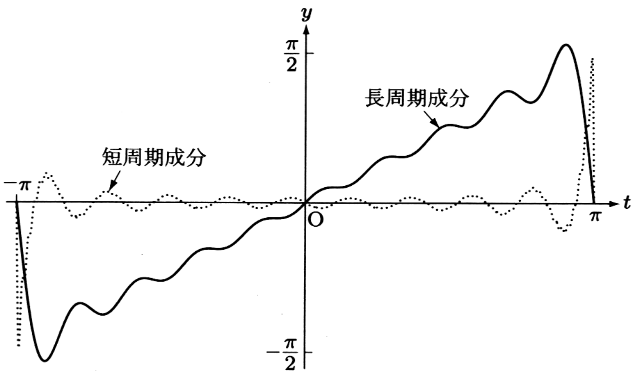


図 6-20 関数 $y = \frac{1}{2}t$ の長周期成分と短周期成分

界条件を満たさない連続関数のフーリエ級数展開：放物線の一部」ではどうだろうか（図 6-8 再掲）.

図 6-8 の曲線の基本周波数の 5 倍振動まで ($N = 5$) の長周期成分とそれより高周波数（短周期）成分を描いたのが図 6-21 である．前の例に比べると，全般的には長周期成分が時系列のゆるやかな変動を表し，これと t 軸の周りに振動する短周期成分（雑音）がきれいに分離されている．ここまでいずれの例においても，(1) の目的のためにはフーリエ展開により精度よく長周期成分を抽出できている．しかし，ここでも時系列の両端付近，特に最後でフーリエ級数の収束が緩慢なためにもっとも誤差が大きい．すなわち，(2) の目的のためには不十分である．

(2) の目的に関しても最初の例のように首尾よく長周期成分を抽出するためには，関

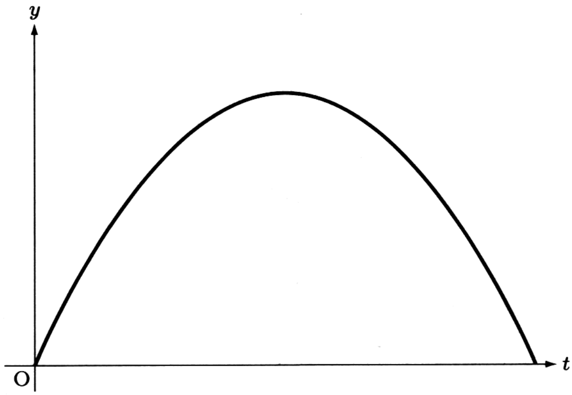


図 6-8　再掲

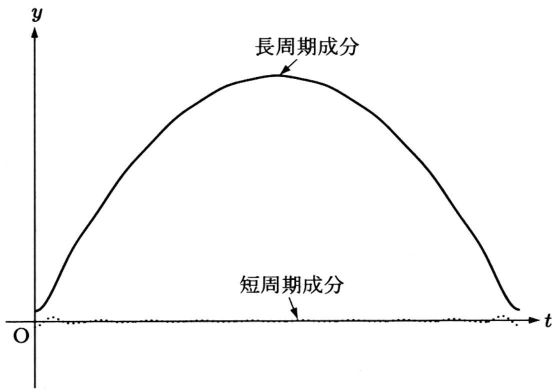


図 6-21　放物線(例 6-5)の長周期成分と短周期成分

数値そのものと導関数の二つの周期的境界条件を満たす時系列を用意する必要がある．このうち，関数が現在と同じ値をとる，過去の時点を発見することは容易であるが，それに加え「同時に導関数も等しい値をとる」という条件まで満足する時点を発見するのは至難の業である．これが (2) の目的でフーリエ級数により長周期成分を抽出するためのネックになる．

では，どうすればよいのか．フーリエ級数に立脚しつつ改良を重ねるのも一つの道であろうし，また固有関数展開の一般論にもどって新たな，ギブス現象を生じない固有関数展開を模索する道もあるだろう．後者の道をとる場合に，本章前半の一般論が役立つであろう．

第 6 章の演習問題

6-1 微分方程式

$$\frac{d^2}{dx^2}y + n^2 y = 0 \qquad (0 \leq x \leq 2\pi) \qquad n：自然数$$

の解が，

(1) 定理 6-3 の条件を満たしていることを確認し，例 6-1 に従い，定理 6-3 の結果を示していることを確認せよ．

(2) 定理 6-7 の条件を満たしていることを確認し，例 6-3 に従い，定理 6-7 の結果を示していることを確認せよ．

6-2 関数 $f(x)$ を区間 $-T/2 \leq \theta \leq T/2$ でフーリエ級数展開するとき，$f(x)$ が奇関数であるならば，正弦関数項のみ，また偶関数であるならば，定数項および余弦関数項のみが現れることを示せ．

6-3 次の関数をフーリエ級数展開せよ．

(1) $y = \theta \qquad (-\pi < \theta < \pi)$　　(2) $y = \log\left(2\cos\frac{1}{2}\theta\right) \qquad (-\pi < \theta < \pi)$

(3) $y = \theta^2 \qquad (-\pi \leq \theta \leq \pi)$

6-4 箱型波

$$y = \begin{cases} 0 & (-\pi \leq x < 0) \\ 1 & (0 \leq x \leq \pi) \end{cases}$$

を区間 $-\pi \leq x \leq \pi$ でフーリエ級数展開せよ．

6-5 (1) 関数 $f(x) = \exp(-\varepsilon|x|)\ (\varepsilon > 0)$ のフーリエ変換 $\tilde{f}(k)$ を求めよ．

(2) $\lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{2\pi}\tilde{f}(k) = \delta(k)$ であること，すなわち，$\lim_{\varepsilon\to 0+} \exp(-\varepsilon|x|)\ (= 1)$ のフーリエ変換は $2\pi\delta(k)$ であることを示せ．

6-6 球座標 (r, θ, ϕ) による 3 次元ラプラス方程式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \cot\theta\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}\right) = 0 \qquad ①$$

の一般解が次式（**球面調和関数**）であることを示せ．

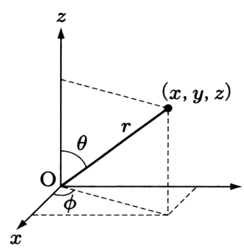


図 6-22　球座標系

$$Y_m^n(\theta,\phi) \equiv (-1)^{(n+|n|)/2}\sqrt{\frac{(2m+1)(m-|n|)!}{4\pi(m+|n|)!}}P_m^{|n|}(\cos\theta)e^{in\phi} \qquad ②$$

（m：0 以上の整数，n：$-m \le n \le m$ の整数，$P_m^n(\cos\theta)$：ルジャンドル陪関数）

6-7　二つのテレビ局 (1, 2) からの電波がアンテナに入ったとき，回路の固有周波数 ω_0

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = V_1\sin\omega_1 t + V_2\sin\omega_2 t \qquad ③$$

がテレビ局 1 の電波の周波数 ω_1 と一致している

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_1$$

ならば，テレビの LCR 回路を流れる電流 $I = \dfrac{dQ}{dt}$ はどのような性質をもつか，調べよ．（L：コイルのインダクタンス，C：コンデンサーの容量，R：抵抗，Q：コンデンサーに蓄えられている電気量）

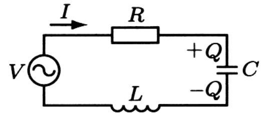


図 6-23　LCR 回路

第7章

漸近級数

第6章まで一貫して，数列・関数列の無限級数が収束するか否かを論じ，それが収束する場合に，その和(極限値)を求めることを主なテーマとしてきた．ところが，本章で紹介する漸近級数は，それが収束するか発散するかに無頓着な級数である．つまり，漸近級数は収束することも，また発散することもあり，そのどちらであるかが問題にならない．しかも，興味深い漸近級数はほぼ例外なく発散する．我が国の解析学のテキストの中には「発散する級数は直接には計算の用に立たない」と明記しているものもあり，漸近級数がどのような意味で有用なのか想像しにくい読者が多いかもしれない．

関数を独立変数のある値 x_0 ($\pm\infty$ を含む)のまわりに展開した無限級数である漸近級数は，当然，その級数の和が「ある意味で」もとの関数を表現する．そして，漸近級数の種類は広範にわたり，テイラー級数もその一部に含むが，その本来の特徴は，特異点 x_0 のまわりに展開した漸近級数に現れる．当然，このとき漸近級数は発散する．しかし，無限級数の和としては発散する漸近級数のはじめの数項のみの部分和(しばしば，初項—これを**主要部**と呼ぶ—のみ)がもとの関数を精度よく表現する．しかも，漸近級数を展開した特異点からはるかに離れた(独立変数の)変域にある関数の値まで精度よく表現するという，通常点のまわりのテイラー級数を凌ぐ優れた特徴をもっている．以下，漸近級数にどのような意味があり，どう役立つのか，具体例に即してみてゆこう．

7-1　漸近解析の問題提起

19×19路，すなわち361の格子点をもつ碁盤に黒白交互に碁石をおいてゆく囲碁というゲームの手順には，数限りない多様性があり，「囲碁の変化は無限だ」などと悦に入っているプロ棋士もいる．しかし，このうかつな発言は数学的には，1，2，3と数

えた後は区別がつかずに『たくさん』といっしょくたにする，表現なのである．

ところがあるとき，あるアマ棋士が「気が遠くなるほどたくさんある囲碁の手順には実際どれほどの種類(場合の数)があるか」を算出することを思い立った．碁の手順には，相手の石を取ったり取り返したりするため複雑化する要因と，361 手まで打たずに終局するという単純化という要因があるが，その概略の手順の場合の数は 361 個の格子点の順列すなわち，361 の階乗程度であろう．彼は 361! が具体的に 10 の何乗になるのか，という計算を試みたのである．これは，

$$\{a_n = n!, \quad n = 1, 2, 3, \cdots\} \tag{7-1-1}$$

という発散する数列が「n とともにどのような速さで大きくなるか (発散するか)？」という漸近解析の問題提起である．

そのアマ棋士は市販の電卓で計算を実施した．

$$361 \times 360 \times 359 \times \cdots$$

と，361 回の掛け算をするのは一見簡単にみえるが，さにあらず．すぐに桁がオーバーフローするので，2，3 回ごとにたとえば 1,000,000 で割り，それを忘れずにメモしておかねばならない．それだけでなく，万一途中で操作を誤りディスプレイが狂ってしまえばやり直しになりかねないので，一回一回数字全体のメモをとり，先に進んだ．そして，361 回の掛け算を完遂し，ついに

$$361! \approx 10^{768}$$

の結果を得るのになんと 7 時間を要したそうである．

この例のように，発散する数列が n とともにどのように大きくなるか，つまり，一般項

$$a_n = n!$$

の変数 n 依存性をより簡単に表現することは，実用的にも有用である．

本問題，すなわち数列 (7-1-1) の漸近級数展開が**スターリングの公式**(7-5 節)

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} - \frac{571}{2488320n^4} + \cdots\right) \qquad n \to +\infty \tag{7-1-2}$$

であり，これを用いて関数電卓で計算すればものの 30 秒で結果を得ることができたのである……．

級数の部分和がそれ自身，数列であるから，発散する級数が具体的にどのような速度で発散するか，すなわち発散する級数の数値評価が重要になることも容易に想像できるだろう．

そして，特に注目すべきことは，スターリングの公式を得るにあたり，$n \to \infty$ という極限を仮定したのにもかかわらず，結果として得られた公式の適用範囲が，$n \to \infty$ から想像される n の変域より格段に広いことである．表 7-1 は，スターリングの公式の第 1 項(主要部)のみ，ないし第 2 部分和で $n!$ を評価したものである．$n \to \infty$ の示唆する適用範囲とはかけ離れた小さな値である $n = 1$ 付近でも，スターリングの公式はきわめて精度の高い近似式であることがわかるだろう．これは漸近級数に共通の長所である．漸近級数に初めて出会った読者は「漸近級数恐るべし」という感慨をいだくのではなかろうか．

この例のように発散級数を評価する場合のほかに，微分方程式の解など，関数が積分の形で表現される場合に，これらの関数の定性的ならびに定量的性質を明らかにするためにも，関数を漸近級数で表すことが有用である(7-4 節, [12, 第 3 章])．

さらに，微分方程式の体系的近似解法である特異摂動法においては，解を漸近級数の形で求め，その第 1 項ないし第 2 項までの部分和が，微分方程式の高精度近似解となる[12, 第 4～6 章]．

表 7-1　スターリングの公式の誤差

n	1	2	3	4	5	10
$n!$ (厳密値)	1	2	6	24	120	3628800
$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ (第 1 近似値：部分和)	0.922	1.92	5.84	23.51	118.0	3598692
相対誤差	**0.08**	**0.04**	**0.027**	**0.020**	**0.017**	**0.0083**
$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+\frac{1}{12n}\right)$ (第 2 近似値：部分和)	0.999	2.00	6.00	24.00	120.0	3628681
相対誤差	**0.001**	**0.0025** 以下	**0.001** 以下	**0.0005** 以下	**0.0004** 以下	**0.00003**

観点をかえると，$n \to \infty$ の極限で発散する級数 (7-1-1) を $n \to \infty$ の条件のもとで評価した式 (7-1-2) は，離散変数 n の関数 a_n を，それが発散する特異点 ($n = \infty$) のまわりに漸近級数展開した式である．通常点のまわりではテイラー級数展開ができ，特異点のうち**正規特異点**のまわりでは**フロベニウス級数展開**

$$y(x) = (x - x_0)^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \qquad (a_0 \neq 0) \tag{7-1-3}$$

が可能であるが，**非正規特異点**のまわりでは漸近級数展開が必須になる[13，第 2 章]．

しかも，一般に漸近級数展開式は，独立変数の非正規特異点から大きく離れた変域にいたるまで有効である，という長所をもっている．初学者には意外なことだろうが，関数解析において，テイラー級数展開の可能な通常点よりも，関数および(あるいは)その導関数が発散する特異点のほうがずっと有用なのである．気づきにくいことかもしれないが，それはこんな卑近な例からも理解できるだろう．

もっとも単純な分数関数，無理関数の式

$$y(x) = \frac{1}{x} \tag{7-1-4a}$$

$$y(x) = \sqrt{x} \tag{7-1-5a}$$

は，これら関数をその特異点 $(x = 0)$ のまわりにフロベニウス級数展開 (7-1-3) し，この場合はそれがたまたま有限級数になったものである．これら二つの関数の表現 (7-1-4a, 5a) は，その独立変数 x の変域全体(式 (7-1-4a) では $-\infty < x < \infty$, $x \neq 0$，式 (7-1-5a) では $0 \leq x < \infty$)にわたる定性的・定量的性質を見事に表現しており，これにより関数のグラフを躊躇なく書き下すことができる．

ところが，もし関数 (7-1-4a, 5a) を通常点，たとえば $x = 1$ のまわりにそれぞれテイラー級数展開

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x-1)^k = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + (x-1)^4 - \cdots \tag{7-1-4b}$$

$$\begin{aligned} y(x) &= 1 + \frac{1}{2}(x-1) + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(2k-3)!!}{2^k k!} (x-1)^k \\ &= 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 - \frac{5}{128}(x-1)^4 + \cdots \end{aligned} \tag{7-1-5b}$$

するとどうだろう．まず，これらの級数は独立変数 x の $|x-1| < 1$ という狭い区間においてしか収束しない上に，詳しく調べることなしに特異点 $x = 0$ の存在を指摘することもできず，ましてや，x の変域全体にわたる関数の定性的・定量的性質を窺い知ることなどは望むべくもない．

つまり，ベキ級数展開の基点として，特異点は通常点よりもはるかに優れている［13，第 2 章］．したがって，本章には漸近級数を解説すると同時に，特異点の有用性の再認識を促すという意図が含まれている．

7-2 漸近級数の定義

7-2-1 漸近関数列

関数を漸近級数に展開するとき，その基底となるのが漸近関数列 (asymptotic sequences) である．関数列 $\{\varphi_m(x)\}$ がすべての m について

$$\varphi_{m+1}(x) = o(\varphi_m(x)) \qquad x \to x_0$$

であるとき，すなわち，$x \to x_0$ の極限において，任意の自然数 m について関数列の第 $m+1$ 項は第 m 項よりはるかに小さいとき，これを**漸近関数列**であるという．漸近関数列には，次のような関数列がある．

$$\{(x - x_0)^m\} \qquad x \to x_0 \tag{7-2-1}$$

$$\{(x - x_0)^{m/5}\} \qquad x \to x_0$$

$$\{\sin^m(x - x_0)\} \qquad x \to x_0$$

$$\{x^{-m}\} \qquad x \to \infty \tag{7-2-2}$$

また，漸近関数列の任意の部分列も漸近関数列である．

7-2-2 漸近級数

漸近関数列 $\{\varphi_m(x)\}$ により展開した級数 $\sum_{m=0}^{\infty} a_m\varphi_m(x)$ がすべての k について

$$y(x) - \sum_{m=0}^{k} a_m\varphi_m(x) \ll \varphi_k(x) \qquad x \to x_0 \tag{7-2-3}$$

の条件を満たすとき，すなわち，$x \to x_0$ の極限において，任意の自然数 k について第 k 部分和 $\sum_{m=0}^{k} a_m\varphi_m(x)$ の残差が漸近関数列の第 k 項よりはるかに小さいとき，級数 $\sum_{m=0}^{\infty} a_m\varphi_m(x)$ は $y(x)$ の（広義の）漸近級数（asymptotic series）であるといい，

$$y(x) \sim \sum_{m=0}^{\infty} a_m\varphi_m(x) \qquad x \to x_0$$

と表記する．

また，すべての k について式 (7-2-3) が成立することを確認できないものの，ある自然数 n について，

$$y(x) - \sum_{m=0}^{n} a_m\varphi_m(x) \ll \varphi_n(x) \qquad x \to x_0$$

が成立するとき，級数 $\sum_{m=0}^{n} a_m \varphi_m(x)$ を，$y(x)$ の n 項の(有限)漸近級数と呼ぶことがある．

漸近級数の第1項を**主要部** (leading term, leading behavior) と呼ぶ．また，主要部の中でもっとも急激に変動する因子を**支配因子** (controlling factor) と呼ぶ．

例 7-1 **エイリー関数の漸近級数展開**(例 7-15 参照)

非正規特異点 $x=\infty$ を有するエイリー(Airy, 1801-1892)の微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} = xy$$

の一般解は，第1種のエイリー関数 $Ai(x)$ と第2種のエイリー関数 $Bi(x)$ の線形結合であり(図 7-1)，その漸近級数展開は次式である[11〜14]．

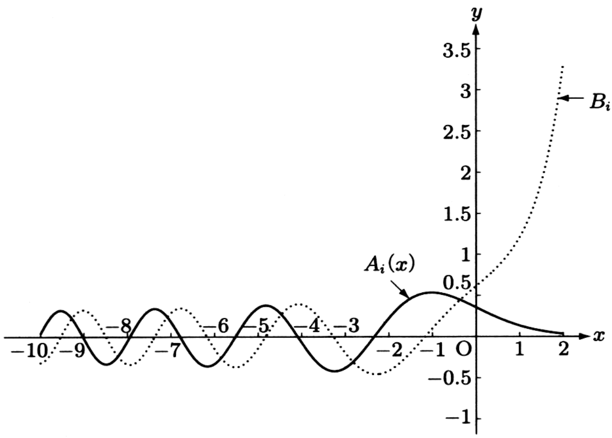


図 7-1　エイリー関数 $Ai(x), Bi(x)$

$$Ai(x) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} x^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3}x^{3/2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n \left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)^{-n} \qquad x \to +\infty$$

$$Bi(x) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} x^{-1/4} \exp\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)^{-n} \qquad x \to +\infty$$

$$c_0 = 1, \qquad c_n = \frac{\Gamma(3n+1/2)}{54^n n! \Gamma(n+1/2)} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

ここに，$\Gamma(x)$ はガンマ関数

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

である．なお，これら二つの漸近級数の主要部は

$$Ai(x) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} x^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3}x^{3/2}\right) \qquad x \to +\infty$$

$$Bi(x) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} x^{-1/4} \exp\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right) \qquad x \to +\infty$$

であり，支配因子は

$$\exp\left(-\frac{2}{3}x^{3/2}\right) \quad \text{および} \quad \exp\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)$$

である．■

■ [漸近ベキ級数]

もっとも重要な漸近級数は，漸近関数列 (7-2-1) によるベキ級数展開，すなわち漸近ベキ級数

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m \tag{7-2-4}$$

である．ベキ級数 (7-2-4) が

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m = y(x) \tag{7-2-5}$$

と収束するならば，それはテイラー級数である（定理 5-14）．そのとき定理 1-8（テイラーの定理）により，自動的にすべての k について漸近級数の条件 (7-2-3)

$$y(x) - \sum_{m=0}^{k} a_m (x - x_0)^m = \frac{y^{(k+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1} \ll (x - x_0)^k \qquad x \to x_0$$

$$(0 < \theta < 1) \tag{7-2-6}$$

を満たす．したがって，ベキ級数 $\sum_{m=0}^{k} a_m (x - x_0)^m$ は $y(x)$ の漸近級数である．

$$y(x) \sim \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m \qquad x \to x_0$$

なお，ベキ級数 (7-2-4) が $y(x)$ のテイラー級数であれば，それが収束しない場合にも条件 (7-2-6) を満たす．したがって，$y(x)$ のテイラー級数は収束するか否かにかかわらず，$y(x)$ の漸近級数である．収束する漸近級数も存在するが，通常取り扱う，興味深い漸近級数は，上記の収束級数の条件を満たさない発散級数である．

例 7-2 スティルチェス級数

微分方程式

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+(3x+1)\frac{dy}{dx}+y=0 \tag{7-2-7}$$

の(特殊)解・スティルチェス(Stieltjes)積分

$$y=I(x)\equiv\int_0^\infty\frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt$$

は $x>0$ で連続かつ微分可能な関数である．これに部分積分を繰り返すことにより

$$I(x)=\sum_{n=0}^{N}(-1)^n n!x^n+R_N(x)$$

$$R_N(x)=(-1)^{N+1}(N+1)!x^{N+1}\int_0^\infty\frac{e^{-t}}{(1+xt)^{N+2}}\,dt$$

を得る (演習問題 7-1)．その残差は漸近級数の条件 (7-2-3)

$$|R_N(x)|=(N+1)!x^{N+1}\ll x^N,\qquad x\to 0+$$

を満たすので，非正規特異点 $x=0$ のまわりのベキ級数型の漸近級数・スティルチェス級数

$$I(x)\sim\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m m!x^m\qquad x\to 0+$$

を得る．ただし，その収束半径は 0 である(演習問題 5-7)．■

極限が $x\to\infty$ の場合には，漸近関数列 $\{x^{-m}\}$ (式 (7-2-2))によるベキ級数展開を用いる．

例 7-3 指数積分 $\left(\frac{1}{x}\right.$ のベキ級数型の漸近級数$\left.\right)$

$$\int_x^\infty\frac{e^{x-t}}{t}\,dt$$

に[†1] 部分積分を繰り返すことにより

$$\int_x^\infty\frac{e^{x-t}}{t}\,dt=\sum_{n=0}^{k}\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}+(-1)^{k+1}\int_x^\infty\frac{(k+1)!e^{x-t}}{t^{k+2}}\,dt$$

を得る．残差は漸近級数の条件 (7-2-3)

$$|R_k|=\left|(-1)^{k+1}\int_x^\infty\frac{(k+1)!e^{x-t}}{t^{k+2}}\,dt\right|\le\left|\frac{(-1)^{k+1}(k+1)!}{x^{k+2}}\int_x^\infty e^{x-t}\,dt\right|$$

†1　$Ei(x)\equiv\int_x^\infty\frac{e^{-t}}{t}\,dt\ (x>0)$ を指数積分 (exponential integral) と呼ぶ．

$$= \left| \frac{(-1)^{k+1}(k+1)!}{x^{k+2}} \right| \ll \left| \frac{1}{x^{k+1}} \right| \tag{7-2-8}$$

を満足する．よって，指数積分の漸近級数

$$\int_x^{\infty} \frac{e^{x-t}}{t}\, dt \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

を得る．■

なお，式 (7-2-8) は漸近級数の条件 (7-2-3) のみならず，級数を $n = k$ 項までで打ち切ったときの残差の絶対値 $|R_k|$ が切り捨てた最初の項 $(n = k+1)$ の絶対値 $\left| \frac{(-1)^{k+1}(k+1)!}{x^{k+2}} \right|$ を超えることがないことを意味している．

この漸近級数のように，漸近級数の条件 (7-2-3) に加えて，「級数を $n = k$ 項までで打ち切ったときの残差が切り捨てた最初の項 $(n = k+1)$ の絶対値を超えることがない」

$$\left| y(x) - \sum_{m=0}^{k} a_m \varphi_m(x) \right| < |a_{k+1}\varphi_{k+1}(x)| \left(\ll \varphi_k(x) \right) \qquad x \to x_0 \tag{7-2-9}$$

という条件を満たすとき，これを**ポアンカレの意味の（狭義の）漸近級数**と呼ぶ．

7-3　漸近級数の性質

漸近解析においてはベキ級数の漸近級数，特に $x \to \pm\infty$ の場合の $1/x$ のベキ級数型の漸近級数が頻出するので，本章の以下でも主としてこれらの型を取り扱う．

■ [収束と漸近]

関数列 $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ の級数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ がある関数 $y(x)$ に収束することと，関数 $y(x)$ に漸近することには大きな相違点がある．

関数列の級数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ が収束するための必要十分条件（定理 5-1 から「一様」を外したもの）は，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$n > N(\varepsilon, x)$ のすべての n および任意の自然数 m について，

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} |f_k(x)| < \varepsilon$$

を満たす自然数 $N(\varepsilon, x)$ を定めることができることである．この条件の中に，収束する関数 $y(x)$ は登場しない．すなわち，関数列の級数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ が収束するか否かは，その

関数列 $f_n(x)$ のみにより決定される**絶対的な**ものであり，それが収束する関数 $y(x)$ はその結果として定まるものである．

ところが，**漸近する**という概念は，関数列 $f_n(x)$ と関数 $y(x)$ の両者に依存する**相対的な**性質である．つまり，ある関数列の級数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ が関数 $y(x)$ の漸近級数であることを示すためには，その関数列 $f_n(x)$ のみならず関数 $y(x)$ も同時に考察する必要がある．つまり，関数列 $f_n(x)$ のみからそれが漸近級数であるかを云々できない

実は，漸近関数列で展開した任意の級数は，必ずある連続関数 $y(x)$ の漸近級数なのである．以下，任意のベキ級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ が必ずある連続関数 $y(x)$ の漸近級数であることを具体的に示す．

次の補助関数

$$
\eta(x-x_0,\xi) \equiv \begin{cases} 1 & \left(|x-x_0| \leq \dfrac{\xi}{2}\right) \\ \left|\sin \pi \dfrac{x-x_0}{\xi}\right| & \left(\dfrac{\xi}{2} \leq |x-x_0| \leq \xi\right) \\ 0 & (\xi \leq |x-x_0|) \end{cases}
$$

を定義すると（図 7-2），関数列の無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ は，連続関数

$$
f(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n \eta(x-x_0,\xi_n)(x-x_0)^n, \qquad \xi_n \equiv \min\left(\frac{1}{|a_n|}, 2^{-n}\right)
$$

に漸近する．すなわち，

$$
f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \qquad x \to x_0 \tag{7-3-1}
$$

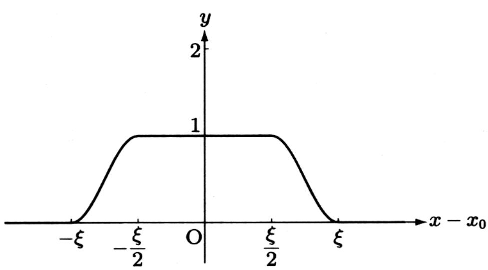


図 7-2　補助関数 $\eta(x-x_0,\xi)$

証明） まず，ξ_n の定義より，与えられた x について $f(x)$ は項数がたかだか $-\dfrac{\log|x-x_0|}{\log 2}$ の有限級数であるから，有界な連続関数である．

さらに，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ の第 N 項まで残したときの残差 $R_N(x,x_0)$ を評価するために，$D = \frac{1}{2}\min(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_N)$ とおくと，$|x-x_0| \le D$ のとき，

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n(x-x_0)^n + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n\eta(x-x_0,\xi_n)(x-x_0)^n$$

となる．また，ξ_n と $\eta(x-x_0,\xi)$ の定義により

$$|a_n\eta(x-x_0,\xi_n)(x-x_0)| \le 1 \quad \text{かつ} \quad |\eta(x-x_0,\xi_n)| \le 1$$

である．したがって，

$$\begin{aligned}
|R_N(x,x_0)| &= \left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n(x-x_0)^n \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n\eta(x-x_0,\xi_n)(x-x_0)^n \right| \\
&\le |a_{N+1}\eta(x-x_0,\xi_{N+1})(x-x_0)^{N+1}| + \left| \sum_{n=N+2}^{\infty} a_n\eta(x-x_0,\xi_n)(x-x_0)^n \right| \\
&\le |a_{N+1}|\,|(x-x_0)^{N+1}| + \left| \sum_{n=N+2}^{\infty} (x-x_0)^{n-1} \right| \\
&\le |x-x_0|^{N+1} \left[|a_{N+1}| + \frac{1}{1-|x-x_0|} \right] \ll (x-x_0)^N \qquad x \to x_0
\end{aligned}$$

■ [最適漸近近似法]

関数 $y(x)$ を $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ の形にベキ級数展開し第 N 項までとったときの残差を，これまでより詳細に，

$$R_N(x,x_0) = y(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n(x-x_0)^n$$

と表す．ある級数が収束しその極限が $y(x)$ であるということは，変数 x を固定して $N \to \infty$ の極限をとったとき，$R_N(x,x_0) \to 0$ であることを意味する．すなわち，収束級数を有限項で打ち切るときの誤差(残差) $R_N(x,x_0)$ は，項の数を大きくすることにより原理的にはいくらでも小さくできる．しかし実際には，$|x-x_0|$ が大きくなると数値計算上の制約から大きな N の部分和を計算し，誤差を十分小さくすることは困難になる．

一方，漸近級数は発散級数であることが多く，残差 $R_N(x,x_0)$ は 0 に収束するとは限らない．すなわち，発散する漸近級数を有限項で打ち切るときの誤差(残差)の絶対値 $|R_N(x,x_0)|$ には下限がある．しかし，一般に，ごく小さな N の部分和をとることにより，収束級数よりもずっと大きな $|x-x_0|$ の範囲にいたるまで，残差の絶対値 $|R_N(x,x_0)|$ を小さくすることが可能である(たとえばスターリングの公式 (7-1-2))．その誤差をもっとも小さくする方法が**最適漸近近似法** (optimal asymptotic approximation) である．例 7-4 で詳しく説明する．

例 7-4　積分表示の関数において，変数 x が正の大きな値をとるときの値を評価する方法

$$f(x) = x\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt \tag{7-3-2}$$

の被積分関数を級数展開し，

$$\frac{x}{x+t} = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n t^n}{x^n} + \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{x^N(x+t)}$$

これにガンマ関数の公式

$$\int_0^\infty t^n e^{-t}\,dt = n!$$

を適用することにより，積分 (7-3-2) をはじめの $n = N$ 項までの有限級数とその残差 R_N との和に分割することができる．

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n n!}{x^n} + R_N \tag{7-3-3}$$

ここに，残差

$$R_N = \int_0^\infty \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1} e^{-t}}{x^N(x+t)}\,dt$$

の絶対値は変数 x の値にかかわらず，もとの関数を式 (7-3-3) の右辺第1項，すなわち $n = N$ 項までの有限級数で打ち切ったときに切り捨てた最初の項 ($n = N + 1$) の絶対値

$$\left|\frac{(-1)^{N+1}(N+1)!}{x^{N+1}}\right|$$

を超えることがない

$$|R_N| < \left|\frac{(-1)^{N+1}}{x^{N+1}}\int_0^\infty t^{N+1} e^{-t}\,dt\right| = \left|\frac{(-1)^{N+1}(N+1)!}{x^{N+1}}\right| \tag{7-3-4}$$

という性質をもっている．すなわち，

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{x^n} \tag{7-3-5}$$

は，ポアンカレの意味の(狭義の)漸近級数である．しかも $|x|$ が大きくなるとともに，R_N は飛躍的に小さくなる．

この性質を利用して関数を数値評価するのが最適漸近近似法である．

具体的には，次のようにしてもとの関数の値を漸近級数から高精度で評価することができる．図 7-3 は $x = 5, 8, 10, 15, 20$ に対応する漸近級数展開式 (7-3-5) の第 n 項の絶対値をそれぞれ計算したものである．いずれの x の値についても，項数 n がふえて

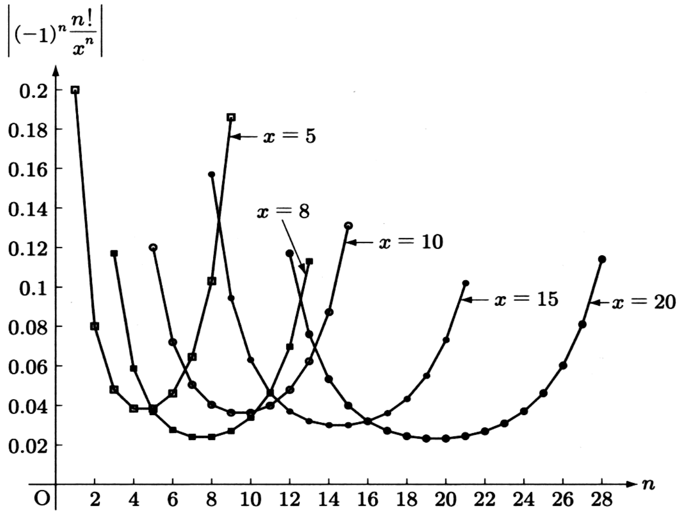


図 7-3　最適漸近近似法

ゆくに従い，項の絶対値ははじめ急激に小さくなるが，ある項から急に大きくなり発散級数の傾向をみせる．これが発散する漸近級数の一般的特徴である．

さて，x のそれぞれの値について，級数展開した項の絶対値が最小になる項番号 n を探すと，$x = 5$ では $n = 4$ と 5，$x = 8$ では $n = 7$ と 8，$x = 10$ では $n = 9$ と 10，$x = 15$ では $n = 14$ と 15，$x = 20$ では $n = 19$ と 20 である．この級数の特殊性により，絶対値が最小になる項がたまたま常に隣り合う二つになっている．これらの番号 n を上述の打ち切り項の次の項 $N+1$ に選ぶと，不等式 (7-3-4) が示すように，式 (7-3-5) の各項の値の絶対値が，その前の項までの部分和により関数を評価したときの誤差の上限であるから，もとの関数 (7-3-2) を漸近級数 (7-3-5) のうち有限級数で評価するときの残差 R_N を最小にすることができる．それゆえ，関数 (7-3-2) の $x = 5, 8, 10, 15, 20$ における値をもっとも正確に(最小誤差で)求めるためには，それぞれ $x = 5$ では $n = 3$ または 4 までの和，$x = 8$ では $n = 6$ または 7 までの和，$x = 10$ では $n = 8$ または 9 までの和，$x = 15$ では $n = 13$ または 14 までの和，$x = 20$ では $n = 18$ または 19 までの和をとるべきである．

表 7-2　関数 (7-3-2) の漸近級数展開 (7-3-5) による評価

	$x = 5$	8	10	15	20
計算値(項数 N)	0.870(4)	0.897(7)	0.915(9)	0.941(14)	0.954(19)
誤差上限	0.0384	0.00240	0.000363	0.299×10^{-5}	0.232×10^{-7}
相対誤差	0.044	0.00267	0.000397	0.318×10^{-5}	0.243×10^{-7}

以上の方法で関数 (7-3-2) を漸近級数展開により評価した数値と，その誤差の上限を表 7-2 に示す．変数 x の値が増加するとともに，その精度は驚異的に向上することがわかる．■

なお，ポアンカレの意味の漸近級数の条件 (7-2-9) を満たさない（広義の）漸近級数の場合にも，漸近級数の定義式 (7-2-3) から明らかなように，漸近級数の $N+1$ 項の絶対値が漸近級数を N 項まで打ち切ったときの級数和の**誤差の目安**となる．それゆえ，一般に発散する漸近級数が漸近する関数の値を評価するときには，各項の値の絶対値を調べその最小値を探し，その絶対値が最小である項の直前の項までの有限級数を用いる．この方法を**最適漸近近似法**と呼ぶ．

■ [漸近級数の一意性と非一意性]

一般に，一つの関数 $y(x)$ は複数の**異なる**漸近級数で表現できる．

$$\frac{1}{1-x} \sim -\sum_{k=1}^{\infty} x^{-k} \qquad x \to +\infty$$

$$\frac{1}{1-x} \sim -\sum_{k=1}^{\infty} (1+x)x^{-2k} \qquad x \to +\infty$$

逆に，ある漸近級数が表現する関数 $y(x)$ は唯一つに**定まらない**．

$$\frac{1}{1-x} \sim -\sum_{k=1}^{\infty} x^{-k} \qquad x \to +\infty$$

$$\frac{1+e^{-x}}{1-x-e^{-2x}} \sim -\sum_{k=1}^{\infty} x^{-k} \qquad x \to +\infty$$

これが，漸近関係記号「~」と等号「=」の大きな相違点である．

一方，ある関数 $y(x)$ を特定の漸近関数列 $\{\varphi_m(x)\}$ で展開するとき，その係数 a_m は**一意的**に定まる．

$$a_0 = \lim_{x \to x_0} y(x)$$

$$a_k = \lim_{x \to x_0} \frac{y(x) - \sum_{m=0}^{k-1} a_m \varphi_m(x)}{\varphi_k(x)}$$

これらの極限が存在することが，関数 $y(x)$ が漸近関数列 $\{\varphi_m(x)\}$ で漸近級数展開できることの条件である．

■ [漸近級数の和と積]

漸近級数はさらに，次の諸性質をもつ．

$$f(x) \sim \sum_{m=0}^{\infty} a_m \varphi_m(x), \qquad g(x) \sim \sum_{m=0}^{\infty} b_m \varphi_m(x) \qquad x \to x_0$$

であるとき，c, d を定数とすると

$$cf(x) + dg(x) \sim \sum_{m=0}^{\infty} (ca_m + db_m)\varphi_m(x) \qquad x \to x_0$$

となり，また，ベキ級数

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \qquad g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n \qquad x \to x_0$$

の場合には次式となる．

$$f(x)g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} h_n (x - x_0)^n, \qquad h_n = \sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m} \qquad x \to x_0$$

■ [漸近級数の項別積分]

漸近級数は，項別に積分(x_0 を一端とする有限区間の定積分)することが可能である．すなわち，

$$f(x) \sim \sum_{m=0}^{\infty} a_m \varphi_m(x) \qquad x \to x_0$$

であり，かつ，積分

$$\Phi_m(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi_m(t)\, dt$$

が存在するならば，

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$$

が存在し

$$F(x) \sim \sum_{m=0}^{\infty} a_m \Phi_m(x) \qquad x \to x_0$$

である．

$x \to +\infty$ の極限における漸近関数列 $\{x^{-m}\}$ によるベキ級数展開

$$y(x) \sim a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{-m} \qquad x \to +\infty$$

では，

$$\int_x^\infty \left(y(x) - a_0 - \frac{a_1}{x}\right) dt \sim \frac{a_2}{x} + \frac{a_3}{2x^2} + \frac{a_4}{3x^3} + \cdots = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{a_m x^{-m+1}}{m-1} \qquad x \to +\infty$$

とする必要がある．

■ [漸近級数の項別微分]

漸近級数を項別に微分することは許されないことがある．それは，次の例のように，関数の値自体は小さいが，関数の変化率である導関数は大きい場合があるからである．つまり，

$$f(x) - g(x) = e^{-1/x^2} \cos(e^{1/x^2}) \qquad x \to 0$$

の右辺は指数関数的に小さいので，左辺の二つの関数は

$$f(x) \sim g(x) \qquad x \to 0$$

である．しかし，二つの関数を微分したものの差は，

$$f'(x) - g'(x) = 2x^{-3} \sin(e^{1/x^2}) + 2x^{-3} e^{-1/x^2} \cos(e^{1/x^2}) \qquad x \to 0$$

であり，右辺に $O(x^{-3})$ という，$x \to 0$ の極限で非常に大きくなる項が現れてしまう．

しかし，応用上もっとも重要なベキ級数による漸近展開の場合には，「関数 $f(x)$ とその微分 $f'(x)$ のベキ級数による漸近級数展開が可能であり，$f'(x)$ が積分可能である」という条件を満たすとき，$f(x)$ の漸近級数を項別微分することが可能である[12].

■ [漸近関係の一様性]

ある関数が，複数の独立変数ないしパラメータの関数 $f(x,\mu)$ であるとき，漸近関係においても一様性という概念が生まれる．たとえば，漸近関係式 $f(x) = o(g(x))$ を一般化した漸近関係

$$f(x,\mu) = o(g(x,\mu)) \qquad \mu \to 0 \tag{7-3-6}$$

すなわち，

$$\lim_{\mu\to 0} \frac{f(x,\mu)}{g(x,\mu)} = 0$$

は，任意の(小さな)正の数 ε に応じて，$|\mu| < \delta$ の範囲のすべての μ が $\left|\frac{f(x,\mu)}{g(x,\mu)}\right| < \varepsilon$ を満足するように正の数 δ を定めることができる，という意味である．

一般に，正の数 $\delta = \delta(\varepsilon, x)$ は ε のみならず変数 x に依存するが，特に $\delta(\varepsilon, x) = \delta(\varepsilon)$ が変数 x に依存しないとき，「漸近関係 (7-3-6) は**一様に成立する** (to hold uniformly)」という．たとえば，

$$\cos(\mu x) = o\left(\frac{x^2+1}{\mu}\right) \qquad \mu \to 0$$

は一様に成立するが，

$$\mu x \sin x = o(\cos(x+\mu)+2) \qquad \mu \to 0$$

は一様には成立しない．

同様に，漸近関係式 $f(x) = O(g(x))$ を一般化した漸近関係

$$f(x,\mu) = O(g(x,\mu)) \qquad \mu \to 0 \tag{7-3-7}$$

は，μ によらないある正の定数 K および δ が存在し，$|\mu| < \delta$ の範囲のすべての μ が

$$\left|\frac{f(x,\mu)}{g(x,\mu)}\right| \le K$$

という関係を満たす，すなわちその比が有界である，という意味である．

一般に，正の数 $K = K(x)$ および $\delta = \delta(x)$ は変数 x に依存するが，特に $K(x) = K_0$ および $\delta(x) = \delta_0$ がいずれも変数 x に依存しないとき，「漸近関係 (7-3-7) は一様に成立する」という．たとえば，

$$\cos(\mu x) = O(1) \qquad \mu \to 0$$

は一様に成立するが，

$$e^{\mu x} - 1 = O(\mu \sin x) \qquad \mu \to 0$$

は一様には成立しない．

■ [漸近級数の一様性]

複数の独立変数ないしパラメータの関数 $f(x,\varepsilon)$ の漸近級数展開においても，一様性という概念が生まれる．なお，前項では ε-δ 法による収束の定義に言及したため関数のパラメータに μ を用いたが，本項以降では関数 $f(x,\varepsilon)$ のパラメータとして微小パラメータ ε を用いる．

特異摂動法[12，第 4〜7 章]の各手法において現れる一般的な漸近級数展開は

$$y = f(x,\varepsilon) \sim \sum_{m=0}^{\infty} a_m(x)\varphi_m(\varepsilon) \qquad \varepsilon \to 0 \tag{7-3-8}$$

の形をとる．そして，漸近関数列 $\{\varphi_m(\varepsilon)\}$ はベキ級数

$$\{\varphi_m(\varepsilon)\} = \{\varepsilon^m\}$$

である場合が一般的である．

さて，式 (7-3-8) が漸近級数であることは，すべての k について

$$f(x,\varepsilon) - \sum_{m=0}^{k} a_m(x)\varphi_m(\varepsilon) \ll \varphi_k(\varepsilon) \qquad \varepsilon \to 0 \tag{7-3-9}$$

を満たすことを意味する．特に，定義域内の変数 x の値によらず式 (7-3-9) が成立するとき，すなわち，$\lim_{\varepsilon\to 0} \dfrac{f(x,\varepsilon) - \sum_{m=0}^{k} a_m(x)\varphi_m(\varepsilon)}{\varphi_k(\varepsilon)} = 0$ が一様収束するとき，式 (7-3-8) を**一様に成立する漸近級数** (uniformly valid asymptotic series) と呼ぶ．一様に成立しない場合，式 (7-3-8) を**特異摂動展開** (singular perturbation expansion) と呼ぶ．

式 (7-3-9) の左辺，すなわち漸近級数展開の $m = k$ 項までとったときの残差 $R_k(x,\varepsilon)$ は，漸近級数展開の $m = k+1$ 項 $a_{k+1}(x)\varphi_{k+1}(\varepsilon)$ により評価することができる．したがって，漸近級数展開の各項は一つ前の項より（十分）小さくなければならない．

$$a_{k+1}(x)\varphi_{k+1}(\varepsilon) = o(a_k(x)\varphi_k(\varepsilon))$$

一方，漸近関数列 $\{\varphi_m(\varepsilon)\}$ は

$$\varphi_{k+1}(\varepsilon) = o(\varphi_k(\varepsilon)) \qquad \varepsilon \to 0$$

を満たすので，漸近級数が一様に成立するためには，すべての k について，また定義域内のすべての変数 x の値に対して，$a_{k+1}(x)$ は $a_k(x)$ よりも**特異性が強くない**必要がある．

たとえば，（収束級数でもある）漸近級数

$$\exp(i\varepsilon\cos x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\varepsilon\cos x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\cos x)^k}{k!}\varepsilon^k \qquad \varepsilon \to 0 \tag{7-3-10}$$

では，すべての係数関数 $a_k(x) = (i\cos x)^k/k!$ は有界であり，それゆえ，すべての k について，また定義域内のすべての変数 x の値に対して，$a_{k+1}(x)$ は $a_k(x)$ に比べて特異性が強くない．したがって，式 (7-3-10) は一様に成立する漸近級数である．

一方，漸近級数

$$\frac{x}{x-\varepsilon} \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{x^k}\varepsilon^k \qquad \varepsilon \to 0 \tag{7-3-11}$$

では，変数 x の原点近傍で $a_{k+1}(x)$ は $a_k(x)$ より特異性が強い．すなわち，

$$a_k(x) = \frac{1}{x^k} = o\left(\frac{1}{x^{k+1}}\right) = o(a_{k+1}(x)) \qquad x \to 0$$

したがって，漸近級数 (7-3-11) は一様に成立しない．

漸近級数 (7-3-8) が一様に成立することは（収束することと同様に）むしろ稀なことで，ほとんどの漸近級数は**一様に成立しない漸近級数**（特異摂動展開）である．

7-4 積分の漸近級数展開

ガンマ(gamma)関数，誤差(error)関数，フレネル(Fresnel)積分は定義式自体が積分であるし，ベッセル(Bessel)関数，エィリー(Airy)関数はもともとベッセル積分，エィリー積分として数学史に登場したものである．そのほか，ルジャンドル(Legendre)関数，放物円筒(parabolic cylinder)関数など数理物理学において頻繁に使用される特殊関数は，すべてその積分表示をもっている．

たとえば，ベッセル関数 $J_\nu(x)$, $Y_\nu(x)$ の積分表示は以下の通りである．

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\theta - \nu\theta)\,d\theta - \frac{\sin\nu\pi}{\nu\pi}\int_0^\infty \exp(-x\sinh t - \nu t)\,dt \qquad (x>0)$$

$$Y_\nu(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x\sin\theta - \nu\theta)\,d\theta - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty (e^{\nu t} + e^{-\nu t}\cos\nu\pi)\exp(-x\sinh t)\,dt \quad (x>0)$$

数理物理学上の問題を解く際，これらの関数の $x \to \pm\infty$ の漸近級数展開を得ることがしばしば必須となる[12，第 4～7 章]．

ベッセル関数 $J_\nu(x)$，$Y_\nu(x)$ の $x \to +\infty$ における漸近展開は，次のように漸近級数を係数にもつ正弦関数の形をもつ．

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{P(\nu,x)\cos\left(x - \frac{(2\nu+1)\pi}{4}\right) - Q(\nu,x)\sin\left(x - \frac{(2\nu+1)\pi}{4}\right)\right\} \quad (x>0)$$

$$Y_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{P(\nu,x)\sin\left(x - \frac{(2\nu+1)\pi}{4}\right) + Q(\nu,x)\cos\left(x - \frac{(2\nu+1)\pi}{4}\right)\right\} \quad (x>0)$$

$$P(\nu,x) \sim \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{(\nu,2k)}{(2x)^{2k}} \qquad x \to +\infty$$

$$= 1 - \frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-9)}{2!(8x)^2} + \frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-9)(4\nu^2-25)(4\nu^2-49)}{4!(8x)^4} - \cdots$$

$$Q(\nu,x) \sim \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{(\nu,2k+1)}{(2x)^{2k+1}} \qquad x \to +\infty$$

$$= \frac{4\nu^2-1}{8x} - \frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-9)(4\nu^2-25)}{3!(8x)^3} + \cdots$$

ここに，

$$(\nu,2k) \equiv \frac{\Gamma(\nu+1/2+2k)}{(2k)!\,\Gamma(\nu+1/2-2k)}$$

はハンケルの記号である．

関数の漸近級数展開は，通常その関数の積分表示から導かれるので，積分型に表現された関数を漸近級数に展開することは重要である．本節では，その代表的方法を解説する．また，対象とする関数の積分表示を $I(x)$ と表記する．なお，本書では複素関

数論の既習を前提としないので，積分の漸近級数展開の代表的方法のうち，複素積分の停留位相法および等位相法[11,12]を割愛する．

■ 7-4-1　基本的方法

独立変数 x をパラメータとする積分で表される関数

$$I(x) = \int_a^b f(t,x)\,dt$$

は，被積分関数 $f(t,x)$ が積分区間 $(a \le t \le b)$ 全体にわたり一様に成立する漸近級数展開をもつならば，$x \to x_0$ の漸近級数展開を容易に得ることができる．

定理 7-1　予備定理　積分区間 $(a \le t \le b)$ 全体にわたり，被積分関数 $f(t,x)$ の漸近関係

$$f(t,x) \sim a_0(t) \qquad x \to x_0$$

が一様に成立するならば，すなわち，

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(t,x)}{a_0(t)} = 1$$

が一様収束するならば，漸近関係

$$I(x) = \int_a^b f(t,x)dt \sim \int_a^b a_0(t)\,dt \qquad x \to x_0$$

を得る．ただし，右辺の積分は有限かつ 0 でない場合に限る．

証明）任意の ε に対して，$|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ のとき，$\left|\dfrac{f(t,x) - a_0(t)}{a_0(t)}\right| < \varepsilon$ である．ここに δ は t に依存しない．したがって，

$$-\varepsilon|a_0(t)| < f(t,x) - a_0(t) < \varepsilon|a_0(t)|$$

$$-\varepsilon\int_a^b |a_0(t)|\,dt < \int_a^b f(t,x)\,dt - \int_a^b a_0(t)\,dt < \varepsilon\int_a^b |a_0(t)|\,dt$$

$$\left|\int_a^b f(t,x)\,dt - \int_a^b a_0(t)\,dt\right| < \varepsilon\int_a^b |a_0(t)|\,dt$$

ゆえに，右辺の積分が有限であり，かつ 0 でなければ，

$$I(x) = \int_a^b f(t,x)\,dt \sim \int_a^b a_0(t)\,dt \qquad x \to x_0$$

である．

これを拡張して，次の定理を得る．

定理 7-2 被積分関数 $f(t,x)$ が，積分区間 $(a \le t \le b)$ 全体にわたり一様に成立する漸近級数展開

$$f(t,x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t)(x-x_0)^{sk} \qquad (s>0) \qquad x \to x_0$$

をもつならば，積分の漸近級数展開

$$I(x) = \int_a^b f(t,x)\,dt \sim \sum_{k=0}^{\infty}(x-x_0)^{sk}\int_a^b a_k(t)\,dt \qquad x \to x_0$$

を得る．ただし，右辺の積分がすべての k について有限である場合に限る．

例 7-5 ガンマ関数型

$$I(x) = \int_0^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}}\,dt \qquad x \to 0$$

$$\frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}} \sim \frac{1}{\sqrt{t}} - \sqrt{t}x + \frac{t\sqrt{t}}{2}x^2 - \frac{t^2\sqrt{t}}{6}x^3 + \cdots \qquad x \to 0$$

は，指数関数のテイラー展開ゆえ一様に成立する．したがって，漸近級数

$$I(x) = \int_0^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}}dt \sim 2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{21}x^3 + \cdots \qquad x \to 0$$

を得る． ■

■ 7-4-2 部分積分法（integration by parts）

部分積分法は，被積分関数を必要な階数微分可能な関数 $f(t,x)$ と必要な階数積分可能な関数 $g(t,x)$ の積とみなし，これに部分積分を繰り返し施す方法であり，積分を漸近級数に展開するための基本的な手法である．

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_a^b f(t,x)g(t,x)\,dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k(f_k(b,x)g_{-k-1}(b,x) - f_k(a,x)g_{-k-1}(a,x)) \\ &\quad + (-1)^n\int_a^b f_n(t,x)g_{-n}(t,x)\,dt \end{aligned} \qquad (7\text{-}4\text{-}1)$$

ここに，$f_k(t,x)$ は $f(t,x)$ を変数 t で k 階微分したもの

$$f_k(t,x) = \frac{\partial^k}{\partial t^k}f(t,x)$$

であり，また，$g_{-k}(t,x)$ は $g(t,x)$ を変数 t で k 階積分したもの，すなわち

$$g(t,x) = \frac{\partial^k}{\partial t^k} g_{-k}(t,x)$$

である．積分の上限または下限が，変数 x あるいはその関数となる場合もある．

例 7-6　**テイラー級数展開**　$(x \to 0)$

もっとも簡単な例の一つ，

$$f(t,x) = f(t), \qquad g(t,x) = 1, \qquad a = 0, \qquad b = x$$

の場合には，

$$f_k(t,x) = f^{(k)}(t), \qquad g_{-k}(t,x) = \frac{(t-x)^k}{k!}$$

となるので，式 (7-4-1) によりテイラー級数

$$\int_0^x f(t)\cdot 1\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{(k+1)!} x^{k+1} + (-1)^n \int_0^x f^{(n)}(t) \frac{(t-x)^n}{n!}\,dt$$

を得る（1-9 節）．ゆえに，すべての n，そして十分小さな x に対して剰余項（残差：右辺の積分）が存在するならば，漸近級数

$$I(x) = \int_0^x f(t)\,dt \sim \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{(k+1)!} x^{k+1} \qquad x \to 0$$

を得る．　■

例 7-7　**不完全ガンマ関数**　$(x \to +\infty)$

$$I(x) = \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$$

これを

$$f(t,x) = \frac{1}{\sqrt{t}}, \qquad g(t,x) = e^{-t}, \qquad a = 0, \qquad b = x$$

とみなし，部分積分すると，

$$I(x) = \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt = \left[-\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\right]_0^x - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t^3}}\,dt$$

を得るが，右辺第 1 項が $t=0$ で，また第 2 項の積分も $t \to 0$ で発散する．つまり，左辺の積分は有限であるにもかかわらず，右辺は $\infty - \infty$ の不定形になっている．このように，積分表示された関数の積分の端点での寄与が積分全体の値よりずっと大きい場合には，単純な部分積分を適用することはできない．

この例では，積分区間を分割することによりこの難点を克服でき，

$$I(x) = \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt - \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) - \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$$

$$= \sqrt{\pi} + \left[\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\right]_x^{\infty} + \frac{1}{2}\int_x^{\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t^3}}\,dt \sim \sqrt{\pi} - \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2x)^k}\right\} \quad x \to +\infty$$

すなわち，$1/\sqrt{x}$ に $1/x$ のベキ級数がかかる型の漸近級数を得る（演習問題 7-2）．■

例 7-8　**ラプラス積分**

ラプラス積分

$$I(x) = \int_a^b f(t)\exp(x\varphi(t))\,dt \tag{7-4-2}$$

の $x \to +\infty$ の極限における振る舞いを考察する．この積分を，式 (7-4-1) において

$$f(t,x) = \frac{f(t)}{x\varphi'(t)}, \qquad g(t,x) = \frac{d}{dt}\exp(x\varphi(t))$$

とおいたものとみなし部分積分する．なお，そのためには積分区間 $[a,b]$ 内のすべての t について $\varphi'(t) \neq 0$ でなければならない．このとき，

$$f_1(t,x) = \frac{d}{dt}\frac{f(t)}{x\varphi'(t)}, \qquad g_{-1}(t,x) = \exp(x\varphi(t))$$

であるから，

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_a^b f(t)\exp(x\varphi(t))\,dt \\ &= \frac{f(b)}{x\varphi'(b)}\exp(x\varphi(b)) - \frac{f(a)}{x\varphi'(a)}\exp(x\varphi(a)) - \int_a^b \frac{d}{dt}\left\{\frac{f(t)}{x\varphi'(t)}\right\}\exp(x\varphi(t))\,dt \end{aligned} \tag{7-4-3}$$

を得る．ここで，式 (7-4-3) の右辺第 3 項の積分が存在することを仮定する．

次に，式 (7-4-3) の右辺第 3 項が第 1，2 項と比較して微小量であることを示す．積分区間 $[a,b]$ 内のすべての t について連続関数 $\varphi'(t)$ が $\varphi'(t) \neq 0$ であることは，$\varphi'(t)$ が定符号であることを意味するので，積分の平均値の定理（1-7 節，定理 1-6）により，

$$\int_a^b \frac{d}{dt}\left\{\frac{f(t)}{x\varphi'(t)}\right\}\exp(x\varphi(t))\,dt = \left[\frac{d}{dt}\left\{\frac{f(t)}{x\varphi'(t)}\right\}\frac{1}{x\varphi'(t)}\right]_{t=c}\int_a^b x\varphi'(t)\exp(x\varphi(t))\,dt$$

$$a < c < b \tag{7-4-4}$$

となるような点 c が区間 (a,b) 内に存在する．式 (7-4-4) の右辺積分を実行すると

$$\left[\frac{d}{dt}\left\{\frac{f(t)}{x\varphi'(t)}\right\}\frac{1}{x\varphi'(t)}\right]_{t=c}\{\exp(x\varphi(b)) - \exp(x\varphi(a))\}$$

となり，大カッコ中の量は $O(1/x^2)$ である．したがって，$\varphi(a) < \varphi(b)$ のとき $f(b) \neq 0$，$\varphi(b) < \varphi(a)$ のとき $f(a) \neq 0$ が成り立つならば，式 (7-4-3) の右辺第 3 項は第 1，2 項の和 $(O(1/x))$ に比べて微小量である．それゆえ，積分 (7-4-2) の主要部は

$$I(x) = \int_a^b f(t)\exp(x\varphi(t))\,dt \sim \frac{f(b)}{x\varphi'(b)}\exp(x\varphi(b)) - \frac{f(a)}{x\varphi'(a)}\exp(x\varphi(a)) \qquad x \to +\infty$$

となる．また，漸近級数の高次項は式 (7-4-3) の右辺第 3 項の積分に部分積分を繰り返し施すことにより得ることができる．なお，本項の方法で得られる漸近級数は，$\exp(x\varphi(b))$ または $\exp(x\varphi(a))$ と $1/x$ の整数ベキ級数の積の型のみである．■

例 7-9　ラプラス積分の主要部

$$I(x) = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\exp(-x\sin t)dt \sim \frac{\cos 0}{x}\exp(-x\sin 0) = \frac{1}{x} \qquad x \to +\infty$$ ■

■ 7-4-3　ラプラスの方法

前項の例 7-8 で，ラプラス積分の漸近級数を得るためには積分区間全域にわたり $\varphi'(t) \neq 0$ でなければならなかった．本項では，$\varphi(t)$ が積分区間 $[a,b]$ 内のある点 c において最大値をとるようなラプラス積分の，$x \to +\infty$ の極限における振る舞いを求めるラプラスの方法を解説する．この方法は，積分の漸近級数展開を求める際にしばしば主導的原理となる．

ラプラス積分 (7-4-2) は被積分関数の中に因子 $\exp(x\varphi(t))$ が存在するので，$\varphi(t)$ が積分区間 $[a,b]$ 内の点 c で最大値をとり，かつ $f(c) \neq 0$ ならば，積分 (7-4-2) は $x \to +\infty$ の極限において $t = c$ に非常に鋭いピークをもつ．

積分 (7-4-2) のピークがこのように鋭いので，$x \to +\infty$ の極限において $t = c$ のごく近傍の区間 $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ からの寄与が卓越し，漸近関係

$$I(x) = \int_a^b f(t)\exp(x\varphi(t))\,dt \sim \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f(t)\exp(x\varphi(t))\,dt \qquad x \to +\infty \tag{7-4-5}$$

が成立する．積分区間を縮めたために生じる誤差は指数関数的に小さく，積分の幅 ε は半値幅（下記囲みの図 7-4 参照）の数倍程度をとれば十分である．

こうして積分区間 $[a,b]$ をごく狭い区間 $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ に縮めることができると，その狭い区間内では $\varphi(t)$ を $t = c$ のまわりにテイラー展開することができる．

$$\varphi(t) = \varphi(c) + \frac{\varphi''(c)(t-c)^2}{2} + \cdots$$

なお，$\varphi(t)$ が点 c で最大値をとるので，$\varphi'(c) = 0$ である．

まず，$\varphi''(c) < 0$ の場合を考える（$\varphi''(c) = 0$ の場合：演習問題 7-4）．$\varphi(t)$ のテイラー展開の 2 次の項までとると，積分 (7-4-5) は

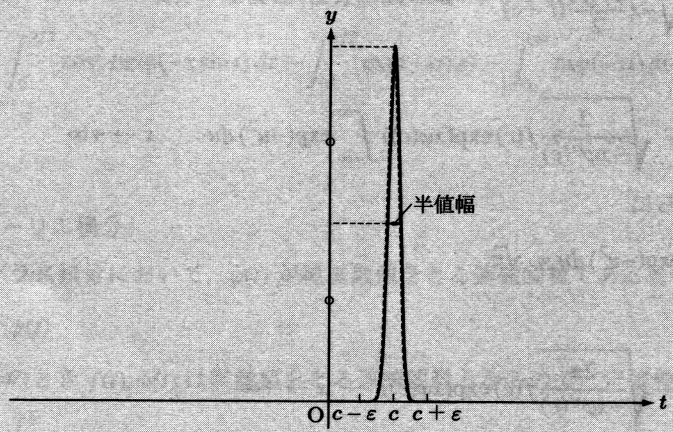


図 7-4　「半値幅」: 関数値のピーク(鋭い最大値)の半分の値をとる独立変数 x の 2 点の幅

$$I(x) \sim \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f(c) \exp\left\{x\left(\varphi(c) + \frac{\varphi''(c)(t-c)^2}{2}\right)\right\} dt \qquad x \to +\infty$$

$$= f(c)\exp(x\varphi(c)) \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} \exp\left(x\frac{\varphi''(c)(t-c)^2}{2}\right) dt \qquad x \to +\infty \qquad (7\text{-}4\text{-}6)$$

となる．なお，$\exp(x\varphi(t))$ に比べずっとゆっくり変動する $f(t)$ は，$t = c$ における値 $f(c)$ で置き換えることができる．

被積分関数

$$\exp\left(x\frac{\varphi''(c)(t-c)^2}{2}\right)$$

の，区間 $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ の外側の積分範囲における積分

$$\int_{-\infty}^{c-\varepsilon} \exp\left(x\frac{\varphi''(c)(t-c)^2}{2}\right) dt$$

および

$$\int_{c+\varepsilon}^{\infty} \exp\left(x\frac{\varphi''(c)(t-c)^2}{2}\right) dt$$

は，積分 (7-4-6) に比べて指数関数的に小さい．それゆえ，計算の便宜のために，精度を失うことなく積分 (7-4-6) の範囲を上下に $\pm\infty$ まで広げることができる．すなわち，

$$I(x) \sim f(c)\exp(x\varphi(c)) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(x\frac{\varphi''(c)(t-c)^2}{2}\right) dt$$

であり，それに伴う誤差は指数関数的に小さい．ここで

$$u = \sqrt{-x\frac{\varphi''(c)}{2}}(t-c)$$

とおくと,

$$I(x) \sim \sqrt{\frac{2}{-x\varphi''(c)}}f(c)\exp(x\varphi(c))\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-u^2)\,du \qquad x \to +\infty$$

となり, さらに

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-u^2)\,du = \sqrt{\pi}$$

を用いると,

$$I(x) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{-x\varphi''(c)}}f(c)\exp(x\varphi(c)) \qquad x \to +\infty \tag{7-4-7}$$

を得る. 最大値をとる点 c が積分の上下限の a または b に一致するときには, 左右対称な積分の一方のみとなるので, 式 (7-4-7) の右辺に 1/2 を乗じる.

以上のように, 積分 (7-4-2) の漸近評価を行うに際し,「積分区間を一旦無限小に縮め, その後無限大に拡大する」という一見荒唐無稽であるが実は当を得た取り扱いが, ラプラスの方法の本質である.

例 7-10　ラプラス積分の主要部(積分区間内部で最大)

$$I(x) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos t\exp(-x\sin t^2)\,dt \sim \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\exp(-xt^2)\,dt \sim \int_{-\infty}^{\infty}\exp(-xt^2)\,dt \qquad x \to +\infty$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-s^2)\,ds = \sqrt{\frac{\pi}{x}} \qquad (\sqrt{x}t = s \text{ とおいた}) \qquad \blacksquare$$

「積分区間を一旦無限小に縮め, その後無限大に拡大する」というラプラスの方法は, 最大値をとる点 c が, 積分の上下限の a または b に一致し, $\varphi'(c) \neq 0$ の場合にも適用できる. 以下, $c = a$ を例に説明する ($\varphi'(a) < 0$).

$$I(x) = \int_a^b f(t)\exp(x\varphi(t))\,dt \sim \int_a^{a+\varepsilon} f(t)\exp(x\varphi(t))\,dt \qquad x \to +\infty$$

$$\sim \int_a^{a+\varepsilon} f(a)\exp(x(\varphi(a) + (t-a)\varphi'(a)))\,dt \qquad x \to +\infty$$

$$= f(a)\exp(x\varphi(a))\int_a^{a+\varepsilon}\exp(x(t-a)\varphi'(a))\,dt$$

$$\sim f(a)\exp(x\varphi(a))\int_a^{\infty}\exp(x(t-a)\varphi'(a))\,dt \qquad x \to +\infty$$

$$= -\frac{f(a)\exp(x\varphi(a))}{x\varphi'(a)}$$

例 7-9（再訪）**ラプラス積分の主要部（積分区間の端 $t=0$ で最大）**

$$I(x)=\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\exp(-x\sin t)\,dt\sim\int_0^{\pi/2}\exp(-xt)\,dt\sim\int_0^{\infty}\exp(-xt)\,dt=\frac{1}{x}$$

$$x\to+\infty$$ ■

■ 7-4-4　フーリエ積分

前項のラプラス積分において，$\varphi(t)$ が純虚数値をとる連続関数である場合

$$\varphi(t)=i\psi(t)$$

を考える．このとき $f(t),\psi(t)$ は実数値をとる連続関数となるので，定積分

$$I(x)=\int_a^b f(t)\exp(ix\psi(t))\,dt \tag{7-4-8}$$

は，ラプラス変換とならぶ代表的な積分変換の一つ，フーリエ変換（6-3 節の積分区間を有限にしたもの）

$$\hat{f}(x)=\int_a^b f(t)\exp(ixt)\,dt \tag{7-4-9}$$

を一般化したものとみることができる．本項ではこの型の積分の $x\to+\infty$ の極限における漸近級数展開を求める．

■［フーリエ変換］

まず，フーリエ変換 (7-4-9) を部分積分する．式 (7-4-9) は式 (7-4-1) で

$$f(t,x)=f(t),\qquad g(t,x)=\exp(ixt)$$

とおいたものであるから，

$$f_n(t,x)=f^{(n)}(t),\qquad g_{-n}(t,x)=(-i)^n\frac{\exp(ixt)}{x^n}$$

と表すことができ，これらを式 (7-4-1) に代入することにより，フーリエ変換 (7-4-9) の x の逆数のベキによる漸近級数展開

$$\begin{aligned}\hat{f}(x)&=\int_a^b f(t)\exp(ixt)\,dt\\&=-\sum_{n=0}^{k-1}i^{n+1}\left(f^{(n)}(b)\frac{\exp(ixb)}{x^{n+1}}-f^{(n)}(a)\frac{\exp(ixa)}{x^{n+1}}\right)+\frac{i^k}{x^k}\int_a^b f^{(k)}(t)\exp(ixt)\,dt\end{aligned} \tag{7-4-10}$$

を得る．式 (7-4-10) の右辺第 2 項の積分の被積分関数は $x \to +\infty$ の極限で非常に速く振動し，隣り合う (正負の異なる値をとる) 小さな区間からの寄与が打ち消し合うので，積分は 0 に収束する (リーマン - ルベーグの定理[12])．

$$\int_a^b f^{(k)}(t)\exp(ixt)\,dt \to 0 \qquad x \to +\infty$$

したがって，式 (7-4-10) の右辺第 2 項は $o(x^{-k})$ であり，第 1 項の境界からの寄与に比べて微小量である．それゆえ，フーリエ積分 (7-4-9) の漸近級数展開

$$\hat{f}(x) = \int_a^b f(t)\exp(ixt)\,dt$$
$$\sim -\sum_{n=0}^{\infty} i^{n+1}\left(f^{(n)}(b)\frac{\exp(ixb)}{x^{n+1}} - f^{(n)}(a)\frac{\exp(ixa)}{x^{n+1}}\right) \qquad x \to +\infty$$

を得る．

■ [一般フーリエ積分]

一般フーリエ積分 (7-4-8) にもどり，その $x \to +\infty$ の極限における振る舞いをみる．$\dfrac{f(t)}{\psi'(t)}$ が積分区間内で滑らかであり，かつ，積分区間の両端で $\psi'(t) \neq 0$ であるならば，積分 (7-4-8) はラプラス積分と同様の方法で部分積分を行うことができ，

$$I(x) = \left[\frac{f(t)\exp(ix\psi(t))}{ix\psi'(t)}\right]_{t=a}^{t=b} - \frac{1}{ix}\int_a^b \frac{d}{dt}\left(\frac{f(t)}{\psi'(t)}\right)\exp(ix\psi(t))\,dt \qquad x \to +\infty$$

を得る．この部分積分の操作を繰り返すことにより，x の逆数のベキによる漸近級数展開を得る．

特に，リーマン - ルベーグの定理により第 2 項は $o(1/x)$ であることがわかるので，一般化フーリエ積分 (7-4-8) の主要部は

$$I(x) \sim \left[\frac{f(t)\exp(ix\psi(t))}{ix\psi'(t)}\right]_{t=a}^{t=b} \qquad x \to +\infty$$

である．

例 7-11　**フーリエ積分の主要部**

$$\int_0^{2\pi} \cos(x(t+\pi)^2)\exp(-t)\,dt = \mathrm{Re}\int_\pi^{3\pi} \exp(ixu^2)\exp(-u+\pi)\,du$$
$$\sim \mathrm{Re}\left[\frac{\exp(-u+\pi)}{ix\cdot 2u}e^{ixu^2}\right]_\pi^{3\pi} = \frac{1}{2\pi x}\left(\frac{1}{3}e^{-2\pi}\sin 9\pi^2 x - \sin \pi^2 x\right) \qquad x \to +\infty$$

ここに，$u = t + \pi$, $f(u) = \exp(-u+\pi)$, $\psi(u) = u^2$. ■

7-5　級数和の漸近級数展開：オイラー - マクローリンの公式

無限級数の和を漸近級数展開する，という表現はあるいは奇異に感じられるかもしれないが，本節では，(主として発散する)無限級数の第 n 部分和 $\sum_{k=0}^{n} a_k$ の $n \to \infty$ における振る舞いを明らかにすべく，オイラー - マクローリン(Euler - Maclaurin)の公式を用いてその漸近級数展開を求める.

その準備としてベルヌイ多項式とベルヌイ数を導入する.

7-5-1　ベルヌイ多項式とベルヌイ数

ベルヌイ多項式(Bernoulli polynomials) $B_n(x)$ は，母関数 $\dfrac{te^{xt}}{e^t - 1}$ の $t = 0$ における n 階微分係数

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!} \qquad (|t| < 2\pi)$$

と定義される，x の n 次多項式であり，そのはじめのいくつかは

$$B_0(x) = 1, \qquad B_1(x) = x - \frac{1}{2}, \qquad B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6},$$

$$B_3(x) = x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{2}, \qquad B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30},$$

$$B_5(x) = x^5 - \frac{5x^4}{2} + \frac{5x^3}{3} - \frac{x}{6}, \quad \cdots$$

である.

ベルヌイ多項式は漸化式

$$\frac{d}{dx} B_{n+1}(x) = (n + 1) B_n(x)$$

と規格化条件

$$\int_0^1 B_n(x)\, dx = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満足し，次の周期性をもつ.

$$B_n(0) = B_n(1) \qquad (n = 2, 3, \cdots)$$

ベルヌイ数(Bernoulli numbers) B_n はベルヌイ多項式を用いて

$$B_n \equiv B_n(0)$$

と定義される．そのはじめの数項は

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_5 = 0, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad \cdots$$

であり，3 以降の奇数項は 0 である．すなわち，

$$B_{2k+1} = 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

次に，**周期的ベルヌイ多項式**(periodic Bernoulli polynomials) $P_n(x)$

$$P_n(x) \equiv B_n(x - [x]) \tag{7-5-1}$$

を定義する．ここに，$[x]$ は x を超えない最大の整数(ガウス記号)である．周期的ベルヌイ多項式 $P_n(x)$ は，区間 $(0, 1)$ においてベルヌイ多項式 $B_n(x)$ に一致する周期 1 の周期関数である．

$$P_n(0) = P_n(1) = B_n \qquad (n = 2, 3, \cdots)$$

ただし，

$$P_1(0) = -P_1(1) = B_1$$

である．

■ 7-5-2　オイラー - マクローリンの公式

区間 $(0, n)$ において，関数 $f(x)$ は $2m$ 階までの連続関数の導関数をもつとする．いま，区間 $[0, n]$ を n 個の等しい小区間(幅 1)に分割する．その $k+1$ 番目の小区間における関数 $f(x)$ の定積分において，部分積分を繰り返すと，

$$\int_k^{k+1} f(x)\,dx = \int_k^{k+1} P_0(x)f(x)\,dx = [P_1(x)f(x)]_k^{k+1} - \int_k^{k+1} P_1(x)f'(x)\,dx$$

$$= \left\{\frac{1}{2}f(k+1) + \frac{1}{2}f(k)\right\} - \int_k^{k+1} P_1(x)f'(x)\,dx$$

$$= \left\{\frac{1}{2}f(k+1) + \frac{1}{2}f(k)\right\} + (-1)^1\left[\frac{P_2(x)}{2}f'(x)\right]_k^{k+1} + (-1)^2\int_k^{k+1}\frac{P_2(x)}{2}f^{(2)}(x)\,dx$$

$$= \left\{\frac{1}{2}f(k+1) + \frac{1}{2}f(k)\right\} + (-1)^1\frac{B_2}{2}\{f'(k+1) - f'(k)\} + (-1)^2\int_k^{k+1}\frac{P_2(x)}{2}f^{(2)}(x)\,dx$$

$$= \left\{\frac{1}{2}f(k+1) + \frac{1}{2}f(k)\right\} + (-1)^1\frac{B_2}{2}\{f'(k+1) - f'(k)\}$$

$$+ (-1)^2\left[\frac{P_3(x)}{3!}f^{(2)}(x)\right]_k^{k+1} + (-1)^3\int_k^{k+1}\frac{P_3(x)}{3!}f^{(3)}(x)\,dx$$

$$= \left\{\frac{1}{2}f(k+1) + \frac{1}{2}f(k)\right\} + (-1)^1\frac{B_2}{2}\{f'(k+1) - f'(k)\} + (-1)^2\frac{B_3}{3!}\{f^{(2)}(k+1) - f^{(2)}(k)\}$$

$$+ (-1)^3\int_k^{k+1}\frac{P_3(x)}{3!}f^{(3)}(x)\,dx$$

$$= \cdots\cdots$$

$$= \left\{\frac{1}{2}f(k+1) + \frac{1}{2}f(k)\right\} - \sum_{j=1}^{m-1}\frac{B_{2j}}{(2j)!}\{f^{(2j-1)}(k+1) - f^{(2j-1)}(k)\} + \int_k^{k+1} f^{(2m)}(x)\frac{P_{2m}(x)}{(2m)!}\,dx \tag{7-5-2}$$

を得る．なお，最終行を得るにあたり，数学的帰納法と式 (7-5-1) を用いた．

式 (7-5-2) をすべての小区間にわたって加え合わせると

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} f(x)\,dx &= \int_0^n f(x)\,dx \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}\{f(k+1)+f(k)\} - \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{m-1}\frac{B_{2j}}{(2j)!}\left\{f^{(2j-1)}(k+1) - f^{(2j-1)}(k)\right\} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} f^{(2m)}(x)\frac{P_{2m}(x)}{(2m)!}\,dx \\
&= \sum_{k=0}^{n} f(k) - \frac{1}{2}\{f(n)+f(0)\} - \sum_{j=1}^{m-1}\frac{B_{2j}}{(2j)!}\left\{f^{(2j-1)}(n) - f^{(2j-1)}(0)\right\} \\
&\quad + \int_0^n f^{(2m)}(x)\frac{P_{2m}(x)}{(2m)!}\,dx
\end{aligned}$$

となり，さらに整理すると，**オイラー - マクローリンの公式**

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} f(k) &= \int_0^n f(x)\,dx + \frac{1}{2}\{f(n)+f(0)\} + \sum_{j=1}^{m-1}\frac{B_{2j}}{(2j)!}\left\{f^{(2j-1)}(n) - f^{(2j-1)}(0)\right\} \\
&\quad - \int_0^n f^{(2m)}(x)\frac{P_{2m}(x)}{(2m)!}\,dx \qquad (m:(\text{十分大きな})\text{自然数})
\end{aligned} \tag{7-5-3}$$

を得る．なお，オイラー - マクローリンの公式には，他にもいくつかの等価な表現がある．

■ 7-5-3　級数和の漸近級数展開

数列 $\{a_k\}$ $(k = 1, 2, \cdots, n, \cdots)$ は，関数 $f(x)$ の定義域を自然数（必要に応じて 0 および負の整数を含む）に限定したものである．

$$a_k \equiv f(k) \qquad (k = 1, 2, \cdots, n, \cdots)$$

この数列の第 0 項（問題によっては第 1 項）から第 n 項までの和（第 n 部分和）

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \equiv f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$$

の $n \to \infty$ における漸近級数展開を，オイラー - マクローリンの公式 (7-5-3) により得ることができる．

例 7-12 リーマンの不完全ツェータ関数(Ｉ)

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\int_1^n\frac{1}{x}\,dx+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+1\right)-\sum_{j=1}^{m-1}\frac{B_{2j}}{2j}\left(\frac{1}{n^{2j}}-1\right)-\int_1^n\frac{P_{2m}(x)}{x^{2m+1}}\,dx$$

$$=\log n+\frac{1}{2}+\sum_{j=1}^{m-1}\frac{B_{2j}}{2j}+\frac{1}{2n}-\sum_{j=1}^{m-1}\frac{B_{2j}}{(2j)n^{2j}}-\int_1^n\frac{P_{2m}(x)}{x^{2m+1}}\,dx$$

$$=\log n+\frac{1}{2}+\sum_{j=1}^{m-1}\frac{B_{2j}}{2j}-\int_1^\infty\frac{P_{2m}(x)}{x^{2m+1}}\,dx+\frac{1}{2n}-\sum_{j=1}^{m-1}\frac{B_{2j}}{(2j)n^{2j}}$$

$$+\int_n^\infty\frac{P_{2m}(x)}{x^{2m+1}}\,dx \tag{7-5-4}$$

式 (7-5-4) では，すべての m について残差 R の絶対値は展開の最終項(第 $m-1$ 項)よりも小さい．

$$|R|=\left|\int_n^\infty\frac{P_{2m}(x)}{x^{2m+1}}\,dx\right|=\left|P_{2m}(\xi)\int_n^\infty\frac{1}{x^{2m+1}}\,dx\right|=\left|\frac{P_{2m}(\xi)}{(2m)n^{2m}}\right|\ll\frac{B_{2(m-1)}}{2(m-1)n^{2(m-1)}}$$

$$(n<\xi<\infty)\qquad n\to\infty$$

ゆえに，漸近級数展開

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sim\log n+C+\frac{1}{2n}-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{B_{2j}}{(2j)n^{2j}}\qquad n\to\infty$$

$$=\log n+C+\frac{1}{2n}-\frac{1}{12n^2}+\frac{1}{120n^4}-\frac{1}{252n^6}+\cdots$$

を得る．ここに，定数項

$$C\equiv\frac{1}{2}+\lim_{m\to\infty}\left\{\sum_{j=1}^{m-1}\frac{B_{2j}}{2j}-\int_1^\infty\frac{P_{2m}(x)}{x^{2m+1}}\,dx\right\} \tag{7-5-5}$$

は**オイラー定数**

$$\log\gamma\equiv\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)=0.57721566\cdots$$

である(3-2 節参照)．　■

例 7-13 スターリングの公式(再訪)

$$\log(n!)=\sum_{k=1}^{n}\log k=\int_1^n\log x\,dx+\frac{1}{2}(\log n+0)+\sum_{j=1}^{m-1}\frac{B_{2j}}{2j(2j-1)}\left(\frac{1}{n^{2j-1}}-1\right)$$

$$+\int_1^n\frac{P_{2m}(x)}{2mx^{2m}}\,dx$$

$$= n(\log n - 1) + 1 + \frac{1}{2}\log n + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{B_{2j}}{(2j)(2j-1)n^{2j-1}} - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{B_{2j}}{2j(2j-1)}$$

$$+ \int_1^n \frac{P_{2m}(x)}{2mx^{2m}}\,dx$$

$$= n\log n - n + \frac{1}{2}\log n + C + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{B_{2j}}{(2j)(2j-1)n^{2j-1}} - \int_n^\infty \frac{P_{2m}(x)}{2mx^{2m}}\,dx \tag{7-5-6}$$

式 (7-5-6) では，すべての m について残差 R の絶対値は展開の最終項(第 $m-1$ 項)よりも小さい.

$$|R| = \left|\int_n^\infty \frac{P_{2m}(x)}{2mx^{2m}}\,dx\right| = \left|\frac{P_{2m}(\xi)}{2m}\int_n^\infty \frac{1}{x^{2m}}\,dx\right|$$

$$= \left|\frac{P_{2m}(\xi)}{(2m)(2m-1)n^{2m-1}}\right| \ll \frac{B_{2(m-1)}}{2(m-1)(2m-3)n^{2m-3}} \quad (n < \xi < \infty) \quad n \to \infty$$

ゆえに，漸近級数展開，すなわちスターリング (Stirling) の公式

$$\log(n!) \sim n\log n - n + \frac{1}{2}\log n + C + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{B_{2j}}{(2j)(2j-1)n^{2j-1}} \qquad n \to \infty$$

を得る．ここに，定数項 C は

$$C = 1 + \lim_{m\to\infty}\left\{-\sum_{j=1}^{m-1} \frac{B_{2j}}{2j(2j-1)} + \int_1^\infty \frac{P_{2m}(x)}{2mx^{2m}}\,dx\right\} = \frac{1}{2}\log 2\pi$$

である. ■

7-6 微分方程式の漸近級数解

独立変数の定義域全体にわたる(大域的な)厳密解を解析的に求めることのできる微分方程式の種類はごく少ない．たとえば線形斉次常微分方程式

$$\frac{d^n y(x)}{dx^n} + p_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y(x)}{dx^{n-1}} + \cdots + p_2(x)\frac{d^2y(x)}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy(x)}{dx} + p_0(x)y(x) = 0 \tag{7-6-1}$$

に限定しても，その解を求める一般的解法は存在しない．このように，大域的な厳密解を得られない場合に，局所的な解を求めることになる．つまり，独立変数の定義域内のある点 x_0 の近傍での解の局所的振る舞いを決定しようとするが，その際，点 x_0 における係数関数 $\{p_k(x)\}$ $(k = 1, \cdots, n-1)$ の解析的性質により，それぞれ異なる方法をとらねばならない[13，第 2 章].

まず，点 x_0 の近傍において，微分方程式 (7-6-1) 係数関数がすべて正則（解析的）であるとき，点 x_0 を微分方程式 (7-6-1) の**通常点**（ordinary point）と呼び，微分方程式 (7-6-1) の n 個の一次独立な解 $\{y_k(x)\}$ $(k = 1, \cdots, n)$ は通常点の近傍で正則であり，解は通常点のまわりにテイラー級数展開

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \tag{7-6-2}$$

できる．そして，級数 (7-6-2) を微分方程式 (7-6-1) に代入し，$(x - x_0)^k$ の各次数ごとに係数が 0 になるという条件を課すことにより，係数 a_k を順次定める漸化式を得ることができる．

次に，点 x_0 が係数関数のいずれかの特異点であるが，すべての係数関数を

$$p_m(z) = \frac{S_m(z)}{(z - z_0)^{n-m}} \qquad S_m(z)：特異点\ z_0\ の近傍で正則な関数$$
$$(m = 0, 1, 2, \cdots, n-1) \tag{7-6-3}$$

と表しうるとき，特異点 z_0 を微分方程式 (7-6-1) の**正規特異点**（regular singular point）と呼ぶ．微分方程式 (7-6-1) の n 個の一次独立な解 $\{y_k(x)\}$ $(k = 1, \cdots, n)$ は，すべて正則であるか，あるいは極ないし（代数的または対数的）分岐の型の特異性

$$y_k(x) = (x - x_0)^{\alpha_k} \sum_{m=0}^{t_k - 1} \{\log(x - x_0)\}^m A_{k,m}(x - x_0) \tag{7-6-4}$$

（$A_{k,m}(x)$ は正則関数，t_k は根 α_k の重複度）

のみをもつ**正規解**（regular solution）である．そしてこの場合にも，級数 (7-6-4) を微分方程式 (7-6-1) に代入し，$(x - x_0)^k$ の各次数ごとに係数が 0 になるという条件を課すことにより，指数 α_k および係数 $A_{k,m}(x)$ を順次定める漸化式を得ることができる．

最後に，点 x_0 が係数関数のいずれかの特異点であり，さらに正規特異点の条件 (7-6-3) を満たさない場合，特異点 z_0 を微分方程式 (7-6-1) の**非正規特異点** (irregular singular point) と呼び，微分方程式 (7-6-1) の n 個の一次独立な解 $\{y_k(x)\}$ $(k = 1, \cdots, n)$ のうち少なくとも一つの解の真性特異点になる．

$$y(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{7-6-5}$$

このとき，級数和の上下限ともに無限大であるゆえ，漸化式により係数を順次定める方法をとることができない．

非正規特異点近傍における解の局所的振る舞いを記述するのが漸近級数展開である．しかも，局所解析により得た漸近級数は，一般にその本来の適用範囲をはるかに超えた，独立変数の広範な区間（領域）にわたり高精度の解を与える，という長所をもつ．

本節では，応用上もっとも頻繁に現れる2階線形斉次常微分方程式を例にとり，その非正規特異点近傍における解の漸近級数展開を得る方法を紹介する．

例 7-14 スティルチェス級数(再訪)

7-2 節では微分方程式

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+(3x+1)\frac{dy}{dx}+y=0 \qquad \text{(7-2-7 再掲)}$$

の一つの解・スティルチェス積分を，部分積分により級数展開してスティルチェス級数を得たが，ここでは，微分方程式 (7-2-7) の二つの独立な解を直接漸近級数として求める．

微分方程式 (7-2-7) の非正規特異点 $x=0$ のまわりにフロベニウス級数解(式 (7-6-4) で $m=0$ の項のみの場合)

$$y(x)=x^\alpha\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k \qquad a_0\neq 0 \qquad \text{(7-6-6)}$$

の存在を仮定して式 (7-2-7) に代入した，

$$x^2\sum_{k=0}^{\infty}a_k(k+\alpha)(k+\alpha-1)x^{k+\alpha-2}+(3x+1)\sum_{k=0}^{\infty}a_k(k+\alpha)x^{k+\alpha-1}+\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+\alpha}=0$$

において，等しいベキの係数を整理すると，最低次の $x^{\alpha-1}$ の係数から

$$a_0\alpha=0 \quad \text{すなわち，指数 } \alpha=0$$

となる．また，一般項 $x^{k+\alpha}=x^k$ の係数から漸化式

$$a_k(k+1)^2+a_{k+1}(k+1)=0$$

を得る．ゆえに一般項は

$$a_k=a_0(-1)^kk!$$

となり，線形斉次微分方程式の解には定数倍の不定性があるので，$a_0=1$ と選んだものがスティルチェス級数

$$I(x)\sim\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kk!x^k \qquad x\to 0+$$

である．

続いて，微分方程式 (7-2-7) の非正規特異点 $x=0$ まわりのもう一つの独立な解，すなわち非正規特異点 $x=0$ を真性特異点とする解を求める．この場合，テイラー級数ないしフロベニウス級数解は存在しないので，漸近級数解を求めなければならない[13]．そのために

$$y(x) = \exp(Q(x)) \tag{7-6-7}$$

とおくのが標準的手法である．これを式 (7-2-7) に代入し，共通因数 $\exp(Q(x))$ で割ると，

$$x^2 \frac{d^2 Q(x)}{dx^2} + x^2 \left\{ \frac{dQ(x)}{dx} \right\}^2 + (3x+1)\frac{dQ(x)}{dx} + 1 = 0 \tag{7-6-8}$$

を得る．このままでは，もとの微分方程式 (7-2-7) に比べ難易度の改善はみられないが，非正規特異点近傍において微分方程式 (7-6-8) の第 1 項と第 2 項の間には次の関係

$$\frac{d^2 Q}{dx^2} \ll \left(\frac{dQ}{dx} \right)^2 \qquad x \to 0+ \tag{7-6-9}$$

が成立する場合がきわめて多い．その結果，微分方程式 (7-6-8) において第 1 項，すなわち 2 階の(一般に「最高階の」）導関数を無視することができ，微分方程式 (7-6-8) は 1 階(非線形)微分方程式となる．通常，後者のほうが容易に厳密解を得やすい．

漸近関係 (7-6-9) を確かめるために，真性特異点付近における代表的な解の振る舞い

$$y = \exp\left(\frac{c}{(x-x_0)^m} \right)$$

すなわち，

$$Q = \frac{c}{(x-x_0)^m}, \qquad m > 0$$

の場合を考えると，確かに

$$\frac{d^2 Q}{dx^2} = \frac{cm(m+1)}{(x-x_0)^{m+2}} \ll \frac{(cm)^2}{(x-x_0)^{2m+2}} = \left(\frac{dQ}{dx} \right)^2$$

である．ただ，特殊な例においてはこの条件が成立しないこともあるので，後にこの近似のもとに得られた解を吟味しなければならない．

$x \to 0+$ の極限で，第 3 項中の $3x$ は 1 に比べて無視できるので，式 (7-6-8) は漸近関係式(漸近微分方程式)

$$x^2 \left\{ \frac{dQ(x)}{dx} \right\}^2 \sim -\frac{dQ(x)}{dx} - 1 \qquad x \to 0+$$

となる．その解は

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4x^2}}{2x^2} \qquad x \to 0+$$

であるが，$x \to 0+$ の極限で，$\sqrt{1-4x^2} \sim 1 - 2x^2$, $x \to 0+$ に注意すると，これらは

$$\frac{dQ}{dx} \sim -1 \qquad x \to 0+$$

および

$$\frac{dQ}{dx} \sim \frac{-1}{x^2} \qquad x \to 0+$$

となる．ゆえに二つの解

$$Q \sim C\ (\text{定数}) \qquad x \to 0+ \qquad (-x\ \text{でないことに注意}) \tag{7-6-10}$$

および

$$Q \sim \frac{1}{x} \qquad x \to 0+ \tag{7-6-11}$$

を得る．

第 1 の解 (7-6-10) を式 (7-6-7) に代入すると

$$y(x) \sim a_0 = \exp(C) \qquad x \to 0+$$

を得る．これは定数であり，第 1 の解が先に得た解，すなわちスティルチェス級数であることがわかる．

次に，第 2 の解 (7-6-11) を式 (7-6-7) に代入すると

$$y(x) \sim \exp\left(\frac{1}{x}\right) \qquad x \to 0+$$

を得る．これが，第 2 の解すなわち漸近級数解のもっとも急激に変動する因子，支配因子である．ここで，$Q(x)$ が仮定 (7-6-9) を満たしていることを確認できる．

次に，主要部を得るために

$$Q(x) = \frac{1}{x} + R(x), \qquad \frac{1}{x} \gg R(x) \qquad x \to 0+ \tag{7-6-12}$$

とおき，式 (7-6-8) に代入すると，

$$x^2\left\{\frac{2}{x^3} + \frac{d^2R}{dx^2} + \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{dR}{dx}\right)^2\right\} + (3x+1)\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{dR}{dx}\right) + 1 = 0$$

さらに，相殺する項を整理すると，

$$x^2\left\{\frac{d^2R}{dx^2} + \left(\frac{dR}{dx}\right)^2\right\} + (3x-1)\frac{dR}{dx} - \frac{1}{x} + 1 = 0 \tag{7-6-13}$$

を得る．

これもまた例外なく成立するわけではないが，漸近関係（式 (7-6-12) の第 2 式）の両辺を微分することが許される場合がきわめて多い[13]．そこで，

$$-\frac{1}{x^2} \gg \frac{dR}{dx}, \qquad \frac{2}{x^3} \gg \frac{d^2R}{dx^2} \qquad x \to 0+ \tag{7-6-14}$$

を仮定し，$R(x)$ の解を得た後にこれを吟味する．式 (7-6-13) に漸近関係 (7-6-14) を適用して卓越する項のみを残すと，式 (7-6-13) は漸近関係

$$\frac{dR}{dx} \sim -\frac{1}{x} \qquad x \to 0+$$

に帰する．これから

$$R \sim -\log x \qquad x \to 0+$$

を得る．ここでも，$R(x)$ は仮定 (7-6-14) を満たしていることを確認できる．こうして，解の $x \to 0+$ における主要部，すなわち $Q(x)$ の項のうち $x \to +\infty$ の極限において残存する部分

$$y(x) \sim \exp\left(\frac{1}{x} - \log x\right) = \frac{1}{x}\exp\left(\frac{1}{x}\right) \qquad x \to 0+ \tag{7-6-15}$$

を得る．

一般には，$Q(x)$ のより高次の近似を求めることにより，漸近級数展開を完成させるのであるが，本問題においては主要部 (7-6-15) がすでに厳密解である（演習問題 7-6）．

■

例 7-15　エィリー関数の $x \to +\infty$ の極限における漸近級数展開（再訪）

7-2 節で紹介したエィリー関数の漸近級数展開式を導こう．エィリーの微分方程式

$$y'' = xy \tag{7-6-16}$$

は非正規特異点 $x = \pm\infty$ をもち，その一般解はエィリー関数 $Ai(x)$ と $Bi(x)$ の線形結合である．ここでも，微分方程式 (7-6-16) の解を

$$y = \exp(Q(x)) \tag{7-6-7 再掲}$$

とおく．式 (7-6-7) を微分方程式 (7-6-16) に代入すると，

$$\left\{\frac{d^2Q}{dx^2} + \left(\frac{dQ}{dx}\right)^2\right\}\exp(Q) = x\exp(Q)$$

となり，共通因子 $\exp(Q)$ で除すと，$Q(x)$ に関する 2 階の微分方程式

$$\frac{d^2Q}{dx^2} + \left(\frac{dQ}{dx}\right)^2 = x \tag{7-6-17}$$

を得る．ここで再び，次の漸近関係

$$\frac{d^2Q}{dx^2} \ll \left(\frac{dQ}{dx}\right)^2 \qquad x \to +\infty \tag{7-6-9 再掲}$$

を仮定すると，

$$\left(\frac{dQ}{dx}\right)^2 \sim x \qquad x \to +\infty$$

を得，これからただちに

$$Q \sim \pm\frac{2}{3}x^{3/2} \qquad x \to +\infty$$

を得る．$Q(x)$ は仮定 (7-6-9) を満たしている．解の主要部を得るために

$$Q(x) = \pm\frac{2}{3}x^{3/2} + R(x), \qquad \frac{2}{3}x^{3/2} \gg R(x) \qquad x \to +\infty \tag{7-6-18}$$

とおき，式 (7-6-17) に代入すると，

$$\pm\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{d^2R}{dx^2} + \left(\pm\sqrt{x} + \frac{dR}{dx}\right)^2 = x$$

すなわち

$$\pm\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{d^2R}{dx^2} \pm 2\sqrt{x}\frac{dR}{dx} + \left(\frac{dR}{dx}\right)^2 = 0 \tag{7-6-19}$$

を得る．ここでも漸近関係（式 (7-6-18) 第 2 式）の両辺を微分することが許される

$$\sqrt{x} \gg R'(x), \qquad \frac{1}{2\sqrt{x}} \gg R''(x), \qquad x \to +\infty \tag{7-6-20}$$

と仮定し，$R(x)$ の解を得た後にこれを吟味する．この仮定の下に，式 (7-6-19) は漸近関係

$$-4x\frac{dR}{dx} \sim 1 \qquad x \to +\infty$$

となり，これから

$$R \sim -\frac{1}{4}\log x \qquad x \to +\infty$$

を得る．ここでも，$R(x)$ は仮定 (7-6-20) を満たしていることを確認できる．こうして，解の $x \to +\infty$ における主要部，

$$y(x) \sim \exp\left(\pm\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{4}\log x\right) = \frac{1}{x^{1/4}}\exp\left(\pm\frac{2}{3}x^{3/2}\right) \qquad x \to +\infty \tag{7-6-21}$$

を得る．

さらに精度を上げるために

$$Q(x) = \pm\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{4}\log x + S(x), \qquad -\frac{1}{4}\log x \gg S(x), \qquad x \to +\infty$$

すなわち，

$$y(x) = \frac{1}{x^{1/4}}\exp\left(\pm\frac{2}{3}x^{3/2} + S(x)\right)$$

とおくのであるが，これと同等の式

$$y(x) = \frac{1}{x^{1/4}}\exp\left(\pm\frac{2}{3}x^{3/2}\right)(1 + T(x)), \qquad 1 \gg T(x) \qquad x \to +\infty \tag{7-6-22}$$

を用いるのが便利である．式 (7-6-22) を式 (7-6-16) に代入し，相殺する項を整理すると，

$$\frac{5}{16x^{9/4}}(1+T(x))+\left(\pm 2x^{1/4}-\frac{1}{2x^{5/4}}\right)T'(x)+\frac{1}{x^{1/4}}T''(x)=0$$

すなわち,

$$x^2T''(x)+\left(\pm 2x^{5/2}-\frac{x}{2}\right)T'(x)+\frac{5}{16}(1+T(x))=0 \tag{7-6-23}$$

を得る.

$T(x)$ を漸近級数展開

$$T(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}d_nx^{\alpha n} \qquad (\alpha<0) \qquad x\to+\infty \tag{7-6-24}$$

すると，その係数 d_n と指数 α を一挙に決定することができる．すなわち，漸近級数展開 (7-6-24) を微分方程式 (7-6-23) に代入すると，漸近関係式

$$\pm 2\alpha d_1x^{\alpha+3/2}+\left(\alpha^2-\frac{3}{2}\alpha+\frac{5}{16}\right)d_1x^{\alpha}\pm 4\alpha d_2x^{2\alpha+3/2}+\cdots\sim\frac{5}{16} \qquad x\to+\infty$$

を得る．まず，両辺の主要部が一致するためには,

$$\alpha+\frac{3}{2}=0, \qquad \pm 2\alpha d_1=\frac{5}{16}$$

でなければならないので,

$$\alpha=-\frac{3}{2}, \qquad d_1=\mp\frac{5}{48}$$

が定まる．一般項 $x^{-3n/2}$ の係数を 0 とおくと，係数 d_n の漸化式

$$\pm 4(n+1)d_{n+1}=3\left(n+\frac{5}{6}\right)\left(n+\frac{1}{6}\right)d_n \qquad (n=1,2,\cdots)$$

を得る．その解は

$$d_n=\left(\pm\frac{3}{4}\right)^n\frac{\Gamma\left(n+\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)n!}=\frac{1}{2\pi}\left(\pm\frac{3}{4}\right)^n\frac{\Gamma\left(n+\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{6}\right)}{n!}$$

である．ここで，ガンマ関数の三重公式[12〜14]

$$\Gamma(3z)=\frac{1}{2\pi}3^{3z-1/2}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(z+\frac{2}{3}\right)$$

において，$z=n+\frac{1}{6}$ とおいたものを用い，全体にかかる任意定数を $Ai(x)$ には $\sqrt{\pi}$，また $Bi(x)$ には $2\sqrt{\pi}$ と選ぶことにより，一般に用いられているエィリー関数の漸近級数展開

$$Ai(x)\sim\frac{1}{2\sqrt{\pi}}x^{-1/4}\exp\left(-\frac{2}{3}x^{3/2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nc_n\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)^{-n} \qquad x\to+\infty$$

$$Bi(x) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} x^{-1/4} \exp\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)^{-n} \qquad x \to +\infty$$

$$c_0 = 1, \qquad c_n = \frac{\Gamma(3n+1/2)}{54^n n! \Gamma(n+1/2)} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を得る. ■

例 7-14, 15 で用いた手法が, 微分方程式の非正規特異点まわりの漸近級数解を得るための標準的手法である. なお, 得られた級数が確かに条件式 (7-2-3) を満たす漸近級数であることを証明するためには, 微分・積分方程式論の詳細な理論を必要とするので, ここでは触れない.

第 7 章の演習問題

7-1 7-2 節「例 7-2 スティルチェス積分」

$$y = I(x) \equiv \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt$$

に部分積分を繰り返すことにより,

$$I(x) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n n! x^n + R_N(x)$$

$$R_N(x) = (-1)^{N+1}(N+1)! x^{N+1} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{(1+xt)^{N+2}} dt$$

を導け.

7-2 例 7-7 の最後の部分

$$\frac{1}{2}\int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t^3}} dt \sim -\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2x)^k} \qquad x \to +\infty$$

を示せ.

7-3 次の積分の $x \to +\infty$ における漸近級数を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_x^{\infty} e^{-t} t^{-p}\, dt$

(2) $\displaystyle\int_a^{x} e^{t} t^{-p}\, dt$

7-4 7-4-3 項のさらに一般的な場合, すなわち $\varphi(t)$ が点 c で最大値をとるが $\varphi''(c) = 0$ である場合, ある偶数 $(2m)$ 階微分係数が最初に 0 でない値(負の値)をとるとき, すなわち,

$$\varphi''(c) = \varphi^{(3)}(c) = \cdots = \varphi^{(2m-1)}(c) = 0, \qquad \varphi^{(2m)}(c) < 0$$

のとき, 積分 (7-4-5) の主要部は

$$I(x) \sim \frac{2\Gamma(1/(2m))}{2m} \sqrt[2m]{\frac{(2m)!}{-x\varphi^{(2m)}(c)}} f(c) \exp(x\varphi(c)) \qquad x \to +\infty$$

となることを示せ.

7-5　次の積分の主要部を求めよ.

(1)　$I(x) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t \exp(-x \sin^4 t)\, dt \qquad x \to +\infty$

(2)　$\int_0^{\pi/4} \cos t e^{-xt^2}\, dt \qquad x \to +\infty$

7-6　例 7-14 において，主要部 (7-6-15) がすでに式 (7-2-7) の厳密解であることを示せ.

7-7　オイラー - マクローリンの公式を用いて，リーマンの不完全ツェータ関数(Ⅱ)の漸近級数展開が

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \sim \frac{2}{3} n^{3/2} + \frac{1}{2} \sqrt{n} + C - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_{2j}(4j-5)!}{(2j)!(2j-2)!2^{4j-3}} \frac{1}{n^{2j-1/2}} \qquad n \to \infty$$

となることを示せ. ここに，定数項 C は

$$C = -\frac{1}{6} + \lim_{m\to\infty} \left\{ \sum_{j=1}^{m-1} \frac{B_{2j}(4j-5)!}{2^{4j-3}(2j)!(2j-2)!} + \int_1^{\infty} \frac{(4m-3)!P_{2m}(x)}{(2m)!(2m-1)!2^{6m-3}x^{2m-1/2}}\, dx \right\}$$

である.

7-8　次の微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} = 0$$

の解である相補誤差関数(complementary error function)

$$Erfc(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \exp(-t^2)\, dt = 1 - Erf(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x} \exp(-t^2)\, dt$$

を，$x \to +\infty$ の漸近級数の形で求めよ.

演習問題の解答

■ 第 1 章 (p. 32)

1-1 極限値を求めるために必要ならば，それぞれの関数の対数(単調増加関数)をとる．

(1) 収束　極限値 0

$\log e^x = x$

$\log x^\alpha = \alpha \log x$

ゆえに，$\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x^\alpha}{\log e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha \log x}{x} = 0$

(2) 収束　極限値 0

$\log x^n = n \log x$

$\displaystyle \log(n!) = \sum_{k=1}^{n} \log k > \int_1^n \log x dx = n(\log n - 1)$　　(定理 3-5 の証明参照)

ゆえに，$\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\log x^n}{\log(n!)}\right| \le \lim_{n\to+\infty} \frac{n \log x}{n \log n} = 0$

(3) 収束　極限値 1/3

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \frac{x^2 - \left(x - x^3/6 + o(x^3)\right)^2}{x^2 (x - x^3/6 + o(x^3))^2} = \frac{x^4/3 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)}$$　(式 (1-10-1) より)

(4) 収束　極限値 1

$\log x^x = x \log x \to 0 \qquad x \to 0$　　(例 1-22)

(5) 収束　極限値 $e^{1/3}$

$$\log\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{1/x^2} = \frac{1}{x^2} \log \frac{\tan x}{x} = \frac{1}{x^2} \log\left(1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) \to \frac{1}{x^2}\frac{x^2}{3} = \frac{1}{3}$$
(式 (1-10-1, 2) より)

(6) 収束　極限値 1/2

$$x - x^2 \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = x - x^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^5} - \cdots\right) \to \frac{1}{2}$$　(式 (1-10-4) より)

1-2

$$a_n = \frac{\alpha^{n-1}(a_2 - \beta a_1) - \beta^{n-1}(a_2 - \alpha a_1)}{\alpha - \beta}$$
$$= \frac{(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})(a_2 - \alpha a_1)}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^{n-1}(\alpha - \beta)a_1}{\alpha - \beta}$$
$$= (\alpha^{n-2} + \alpha^{n-3}\beta + \cdots + \alpha\beta^{n-3} + \beta^{n-2})(a_2 - \alpha a_1) + \alpha^{n-1}a_1$$
$$\to (n-1)\alpha^{n-2}(a_2 - \alpha a_1) + \alpha^{n-1}a_1$$
$$= \alpha^n\left((n-1)\frac{a_2}{\alpha^2} - (n-2)\frac{a_1}{\alpha}\right), \qquad \beta \to \alpha$$

1-3

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega,$$
$$\frac{C}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\omega t = \frac{C(\cos\omega_0 t\cos\Delta\omega t - \sin\omega_0 t\sin\Delta\omega t)}{-\Delta\omega(2\omega_0 + \Delta\omega)} \to \frac{C(\cos\omega_0 t - \Delta\omega t\sin\omega_0 t)}{-\Delta\omega(2\omega_0 + \Delta\omega)}$$
$$= \frac{C}{-2\omega_0\Delta\omega}\cos\omega_0 t + \frac{C}{2\omega_0}t\sin\omega_0 t, \qquad \Delta\omega \to 0$$

最終式第 1 項は一般解に吸収される.

1-4 $f(x)$ が $x = c$ で連続であるから，任意の $\varepsilon > 0$ が与えられたとき，$|x - c| < \delta_1(\varepsilon)$ を満足する c 以外のすべての x の値に対して

$$|f(x) - f(c)| < \varepsilon \quad \text{すなわち,} \quad f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon$$

が成立するような $\delta_1(\varepsilon) > 0$ を定めることができる.

また，$\lim_{x\to\alpha} g(x) = c$ であるから，任意の $\delta_1(\varepsilon) > 0$ が与えられたとき，$|x - \alpha| < \delta_2(\delta_1(\varepsilon))$ を満足する α 以外のすべての x の値に対して $|g(x) - c| < \delta_1(\varepsilon)$ が成立するような $\delta_2(\delta_1(\varepsilon)) > 0$ を定めることができる.

ゆえに，$|x - \alpha| < \delta_2(\delta_1(\varepsilon))$ を満足する α 以外のすべての x の値に対して，

$$|f(g(x)) - f(c)| < \varepsilon$$

が成立する.

1-5 $|x| < 1$ のとき

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x + \cdots + \frac{(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - 1\right)\cdots\left(\frac{1}{2} - n + 1\right)}{n!}x^n + \cdots$$
$$= 1 - \frac{1}{2}x + \cdots + \frac{(-1)135\cdots(2n-3)}{2^n n!}x^n + \cdots$$
$$= 1 - \frac{1}{2}x + \cdots + \frac{(-1)(2n-3)!}{2^{2n-2}n!(n-2)!}x^n + \cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \cdots + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - 1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2} - n + 1\right)}{n!}x^n + \cdots$$
$$= 1 - \frac{1}{2}x + \cdots + \frac{(-1)^n(2n-1)!}{2^{2n-1}n!(n-1)!}x^n + \cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^n\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}x^{2n} + \cdots$$
$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{(2n-1)!}{2^{2n-1}n!(n-1)!}x^{2n} + \cdots$$

1-6 $|x| < 1/2$ のとき

$$\frac{1}{(2x+1)(x-1)} = -\frac{2}{3}\frac{1}{1+2x} - \frac{1}{3}\frac{1}{1-x}$$
$$= -\frac{2}{3}\left\{1 - 2x + (2x)^2 - \cdots + (-2x)^n + \cdots\right\} - \frac{1}{3}\left(1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots\right)$$
$$= -1 + x - 3x^2 - \cdots - \frac{1}{3}\left\{1 + (-2)^{n+1}\right\}x^n + \cdots$$

1-7

$$\sin x = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \frac{x^{2n}}{(2n)!}\sin(\theta x + n\pi)$$

であり，$2n-1$ 次項までの残差は，

$$|R(2n-1, x)| < \frac{(\pi/2)^{2n}}{(2n)!} \cong 2.52 \times 10^{-5} \qquad (n = 5)$$

であるから，5 項まで必要．

しかし，区間 $[0, \pi/4]$ まで上式を用い，

$$|R(2n-1, x)| < \frac{(\pi/4)^{2n}}{(2n)!} \cong 3.59 \times 10^{-6} \qquad (n = 4)$$

区間 $[\pi/4, \pi/2]$ において $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ を使えば，

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin(\theta x + (n+1)\pi)$$

であり，$2n$ 次項までの残差は

$$R(2n, x) = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin(\theta x + (n+1)\pi)$$
$$|R(2n, x)| < \frac{(\pi/4)^{2n+1}}{(2n+1)!} \cong 3.66 \times 10^{-5} \qquad (n = 3)$$

ゆえ，正弦関数では 4 項，余弦関数では 3 項までとればよい．

1-8

(1) $o(O(f(x))) \leq o(Kf(x)) = o(f(x)) \qquad \left(\because \lim_{x\to x_0} \frac{K \cdot o(f(x))}{f(x)} = 0\right)$

$\therefore\ o(O(f(x))) = O(o(f(x)))$

(2) $o(o(f(x))) = o(f(x)) \qquad \left(\because \lim_{x\to x_0} \frac{o(f(x))}{f(x)} = 0\right)$

(3) $o(f(x))o(g(x)) = o(f(x)g(x)) \qquad \left(\because \lim_{x\to x_0} \frac{o(f(x))o(g(x))}{f(x)g(x)} = 0\right)$

第 2 章（p. 42）

2-1　適当な $N(\varepsilon)$ を選択することにより，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，すべての $n > N(\varepsilon)$ について $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ を満たすことができる．ゆえに，

$$\left|\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n} - \alpha\right| = \left|\frac{\sum_{k=1}^{n}(a_k - \alpha)}{n}\right| \leqq \left|\frac{\sum_{k=1}^{N}(a_k - \alpha)}{n}\right| + \left|\frac{\sum_{k=N+1}^{n}(a_k - \alpha)}{n}\right|$$

$$< \left|\frac{\sum_{k=1}^{N}(a_k - \alpha)}{n}\right| + \frac{(n-N)\varepsilon}{n}$$

したがって，

$$\left|\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n} - \alpha\right| \leq \left|\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{N}(a_k - \alpha)}{n}\right| + \lim_{n\to\infty}\frac{(n-N)\varepsilon}{n} = \varepsilon$$

逆が真でない例は $a_k = (-1)^k$

2-2

(1)　収束する．

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}$$

$$= \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{m}\left\{\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+m-1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}\right\}$$

$$= \frac{1}{m}\left\{\frac{1}{m!} - \frac{1}{(N+1)(N+2)\cdots(N+m)}\right\}$$

ゆえに，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+m)} = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}$$

$$= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{m}\left\{\frac{1}{m!} - \frac{1}{(N+1)(N+2)\cdots(N+m)}\right\} = \frac{1}{mm!}$$

(2)　収束する．

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(N+1)!}$$

ゆえに，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!} = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{(n+1)!} = \lim_{N\to\infty}\left\{1 - \frac{1}{(N+1)!}\right\} = 1$$

2-3

$$\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)=1+(-1)^N\frac{1}{N+1}\to 1\qquad N\to\infty$$

2-4

$$\sum_{n=2}^{N}n(a_n-a_{n-1})=-\sum_{n=2}^{N-1}a_n-2a_1+Na_N=-\sum_{n=2}^{N-1}a_n-2a_1+o(1)\qquad N\to\infty$$

2-5

(1) $$\frac{\sum_{k=1}^{M}b_ka_k}{\sum_{k=1}^{M}b_k}=\frac{\sum_{k=1}^{N}b_ka_k}{\sum_{k=1}^{M}b_k}+\frac{\sum_{k=N+1}^{M}b_ka_k}{\sum_{k=1}^{M}b_k}=\frac{\sum_{k=1}^{N}b_ka_k}{\sum_{k=1}^{M}b_k}+\frac{\sum_{k=N+1}^{M}b_k(a_k-\alpha)}{\sum_{k=1}^{M}b_k}+\alpha\frac{\sum_{k=N+1}^{M}b_k}{\sum_{k=1}^{M}b_k}\quad(N<M)$$

$$\to 0+0\cdot 1+\alpha\cdot 1=\alpha\qquad(M\to\infty)\qquad\left(\because\left|\sum_{k=1}^{M}b_k(a_k-\alpha)\right|<\varepsilon\left|\sum_{k=1}^{M}b_k\right|\right)$$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ は単純発散するので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}k\sin\frac{\theta}{k}}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}=\lim_{k\to\infty}k\sin\frac{\theta}{k}=\theta$

■ 第 3 章（p. 56）

3-1

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\alpha^2}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$：収束

(2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^\alpha}\sim\int_2^{\infty}\frac{dx}{(\log x)^\alpha}=\int_{\log 2}^{\infty}\frac{e^y dy}{y^\alpha}$：単純発散　$(\log x=y)$

(3) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)^\alpha}\sim\int_2^{\infty}\frac{dx}{x(\log x)^\alpha}=\int_{\log 2}^{\infty}\frac{dy}{y^\alpha}$　$\alpha>1$：収束，　$\alpha\le 1$：単純発散

(4) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^{2n}}$　$\displaystyle\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{(\log n)^2}\to 0$：収束

(5) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^{\log n}}$　$(\log n)^{\log n}=(e^{\log(\log n)})^{\log n}=n^{\log(\log n)}$

ゆえに，$\displaystyle\frac{\frac{1}{(\log n)^{\log n}}}{\frac{1}{n^2}}=\frac{n^2}{n^{\log(\log n)}}=\frac{1}{n^{\log(\log n)-2}}\to 0$：収束

3-2

$$\sqrt{a_na_{n+1}}\le\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$$

ゆえに，

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k a_{k+1}} \le \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k + \sum_{k=1}^{n}a_{k+1}\right)$$

$n \to \infty$ の極限で右辺が収束するので，左辺も収束する．

3-3

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\log k} \sim \int_2^{n+1}\frac{dx}{x\log x} = [\log(\log x)]_2^{n+1} \sim \log(\log n) + O(1) \qquad n \to \infty$$

3-4

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+k} &= \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\\ &= \left(\log(2n) + \log\gamma + o\left(\frac{1}{2n}\right)\right) - \left(\log(n) + \log\gamma + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \qquad n \to \infty\\ &= \log 2 + o\left(\frac{1}{n}\right) \qquad n \to \infty \qquad \text{（例 3-3 参照）}\end{aligned}$$

3-5

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}\frac{n-k+1}{k} &= -n+1+(n+1)\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \sim -n+(n+1)(\log n + \log\gamma + o(1))\\ &\sim n(\log n - 1) \sim \log n! \qquad n \to \infty\end{aligned}$$

3-6　任意の $\varepsilon > 0$ について $n > n_0$ のとき，$\alpha - \varepsilon < \sum_{k=1}^{n} a_k < \alpha + \varepsilon$ とできる．ゆえに，

$$\sum_{n=n_0+1}^{N}\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{n} = \sum_{n=1}^{N}\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{n} - \sum_{n=1}^{n_0}\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{n} = \sum_{n=1}^{N}\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{n} - O(1)$$

は

$$\begin{aligned}(\alpha-\varepsilon)\log N + O(1) \sim \sum_{n=n_0+1}^{N}\frac{\alpha-\varepsilon}{n} &< \sum_{n=n_0+1}^{N}\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{n}\\ &< \sum_{n=n_0+1}^{N}\frac{\alpha+\varepsilon}{n} \sim (\alpha+\varepsilon)\log N + O(1) \qquad N \to \infty\end{aligned}$$

となるので（例 3-3 参照），

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{n} = \sum_{n=n_0+1}^{N}\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{n} + O(1) \sim \alpha\log N \qquad N \to \infty$$

3-7　比試験を行うと，

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2^{-1+(-1)^n-(-1)^{n+1}} = \begin{cases}2 & (n：\text{偶数})\\ 1/8 & (n：\text{奇数})\end{cases} \qquad \text{ゆえ，判定不能.}$$

根試験により，

$$\sqrt[n]{a_n} = 2^{-1-(-1)^n/n} \to 1/2：\text{収束}$$

と判定できる．

3-8　定理 3-5 を用いる．

(1)　$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n} > \int_2^{\infty}\frac{1}{x\log x}dx = \lim_{X\to\infty}[\log(\log x)]_2^X$ ：単純発散

(2)　$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} > \int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}dx = \begin{cases}\displaystyle\lim_{X\to\infty}[\log x]_1^X & ：単純発散\ (p=1)\\ \displaystyle\frac{1}{1-p}\lim_{X\to\infty}\left[x^{1-p}\right]_1^X & ：単純発散\ (p<1)\end{cases}$$

■ 第 4 章（p. 65）

4-1

(1)　収束・絶対収束する x の範囲：すべての x

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n)!}x^n \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)x}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{x}{2(2n+1)} \to 0 \qquad n\to\infty$$

(2)　収束する x の範囲：$-4 \le x < 4$　　絶対収束する x の範囲：$-4 < x < 4$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2x}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{(n+1)x}{2(2n+1)} \to \frac{x}{4} \qquad n\to\infty$$

(3)　収束・絶対収束する x の範囲：0 以外のすべての x

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{nx}\right)^n \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{-1}{x}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{-1}{x}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\frac{1}{n+1} \to 0\ (x\neq 0) \qquad n\to\infty$$

(4)　収束・絶対収束する x の範囲：$-1 < x < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^x} \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = x\frac{n^x}{(n+1)^x} = x\left(\frac{n}{n+1}\right)^x \to x \qquad n\to\infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\ (x=1), \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\ (x=-1)$$ ：いずれも発散

4-2　$\alpha \le 0$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ゆえ発散．

$\alpha > 0$ のとき，

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{1}{1^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}-\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{5^\alpha}+\frac{1}{7^\alpha}-\frac{1}{4^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(4n-3)^\alpha}+\frac{1}{(4n-1)^\alpha}-\frac{1}{(2n)^\alpha}\\ &= \left(\frac{1}{1^\alpha}-\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}-\frac{1}{4^\alpha}+\cdots-\frac{1}{(4n)^\alpha}\right)+\left(\frac{1}{(2n+2)^\alpha}+\frac{1}{(2n+4)^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(2n+2n)^\alpha}\right)\\ &= \left(\frac{1}{1^\alpha}-\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}-\frac{1}{4^\alpha}+\cdots-\frac{1}{(4n)^\alpha}\right)+\frac{1}{2^\alpha}\left(\frac{1}{(n+1)^\alpha}+\frac{1}{(n+2)^\alpha}+\cdots+\cdots+\frac{1}{(n+n)^\alpha}\right)\end{aligned}$$

$n\to\infty$ で右辺第 1 項，絶対値が単調減少する交代級数ゆえ収束する（定理 4-6）．また，第 2 項は $\displaystyle\frac{1}{2^\alpha}\int_n^{2n}\frac{1}{x^\alpha}dx$ に漸近する．ゆえに，

$\alpha \ge 1$：収束

$1 > \alpha$：単純発散

$\alpha = 1$ のとき，

$$S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{(4n-3)} + \frac{1}{(4n-1)} - \frac{1}{2n}$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots - \frac{1}{4n}\right) + \left(\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+4} + \cdots + \frac{1}{2n+2n}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots - \frac{1}{4n}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}\right)$$

$$\sim \log 2 + \frac{1}{2}\int_n^{2n} \frac{dx}{x} = \log 2 + \frac{1}{2}\log\frac{2n}{n} = \frac{3}{2}\log 2 \qquad n \to \infty$$

4-3　ならべ替えた数列

$$\left\{\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2m-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)\right\}$$

$$+ \left\{\left(\frac{1}{2m+1} + \cdots + \frac{1}{4m-1}\right) - \left(\frac{1}{2n+2} + \cdots + \frac{1}{4n}\right)\right\} + \cdots$$

の第 k 部分和は，

$$\left\{\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2km-1} - \frac{1}{2km}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2km}\right)\right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2kn}\right)\right\}$$

$$= \left(\log 2 + o\left(\frac{1}{km}\right)\right) + \left(\frac{1}{2}\left(\log km + \log\gamma + o\left(\frac{1}{km}\right)\right)\right) - \left(\frac{1}{2}\left(\log kn + \log\gamma + o\left(\frac{1}{kn}\right)\right)\right)$$

$$= \log 2 + \frac{1}{2}\log km - \frac{1}{2}\log kn + o\left(\frac{1}{km}\right) + o\left(\frac{1}{kn}\right)$$

$$= \log 2 + \frac{1}{2}\log\frac{m}{n} + o\left(\frac{1}{km}\right) + o\left(\frac{1}{kn}\right) \qquad k \to \infty \qquad \text{（例 3-3 参照）}$$

4-4

(1)
$$\left(1 + \frac{1}{2} - 1\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right) + \cdots$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k} - \frac{1}{k}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \log 2$$

(2)
$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 1\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3}\right) + \cdots$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left\{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{3k}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}\right)\right\}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left\{\left(\log 3k + \log\gamma + o\left(\frac{1}{k}\right)\right) - \left(\log k + \log\gamma + o\left(\frac{1}{k}\right)\right)\right\} = \log 3$$

4-5 $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \alpha$ とかくと，

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|\ |a_k| \leq \alpha \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \alpha^2$$

逆が成り立たない例は $a_k = \dfrac{1}{k}$

4-6 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ が絶対収束するので，$n > N$ を満足するすべての n の値に対して $|a_n| < 1/4$ が成立するような N を定めることができる．

i） $a_n \geq 0$，$n > N$ のとき

$$\left|\log(1 + a_n)\right| = \log(1 + |a_n|) = |a_n| \left(1 - \frac{|a_n|}{2} + \frac{|a_n|^2}{3} - \frac{|a_n|^3}{4} + \cdots\right) \quad \text{（式 (1-10-4) より）}$$

$$\leq |a_n| \left(1 + |a_n| + |a_n|^2 + |a_n|^3 + \cdots\right) = \frac{|a_n|}{1 - |a_n|} \leq \frac{4}{3}|a_n|$$

ii） $a_n < 0$，$n > N$ のとき

$$\left|\log(1 + a_n)\right| = \log \frac{1}{1 + a_n} = \log\left(1 - \frac{a_n}{1 + a_n}\right) = \log\left(1 + \frac{|a_n|}{1 - |a_n|}\right)$$

$$\leq \frac{\dfrac{|a_n|}{1 - |a_n|}}{1 - \dfrac{|a_n|}{1 - |a_n|}} = \frac{|a_n|}{1 - 2|a_n|} \leq 2|a_n|$$

ゆえに，いずれの場合にも

$$\left|\log(1 + a_n)\right| \leq 2|a_n|$$

4-7

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{a_k}{k}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{a_k^2}{k^2}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(a_k^2 + \frac{1}{k^2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

右辺 2 項はそれぞれ絶対収束するので，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k}$ は絶対収束する．

4-8

i） $n : 0$ または自然数のとき有限級数なので収束

ii） その他のとき $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} = \dfrac{k - n}{k + 1} > 0 \quad (k > n)$，かつ $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} \to 1 \quad (k \to +\infty)$

ゆえに，定符号であるから正符号とし，

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{k + 1}{k - n} = 1 + \frac{n + 1}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right) \qquad (k \to +\infty)$$

ゆえに，定理 3-11（ラーベ試験）により，

ii-1) $n < 0$ ならば，単純発散．

ii-2) $n > 0$ ならば，収束する．

■ 第 5 章 (p. 92)

5-1

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^n}$　　$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1+x^n}{1+x^{n+1}}\to\dfrac{1}{x}$　　$(|x|>1)$：収束

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}a_n\neq 0$　　$(|x|\leq 1)$：発散

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n^\alpha}$　$(\alpha>0)$　　$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha}x\to x$　　$(n\to\infty)$

$\alpha>1$　　$|x|\leq 1$：収束

$1\geq\alpha>0$　　$-1\leq x<1$：収束

5-2 式 (5-4-1) の θ に $\pi-\theta$ を代入する.

5-3 式 (5-4-2) の θ に $\pi-\theta$ を代入する.

5-4

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin n\theta}{n}=\frac{1}{2}\theta\qquad(-\pi<\theta<\pi)\qquad\text{（演習問題 5-2 ①再掲）}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}=\frac{1}{2}(\pi-\theta)\qquad(0<\theta<2\pi)\qquad(5\text{-}4\text{-}1)$$

を辺々加えて 2 で割る $(0<\theta<\pi)$.

式 (5-4-1) の θ に $3\pi-\theta$ を代入すると,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin n\theta}{n}=-\pi+\frac{1}{2}\theta\qquad(\pi<\theta<3\pi)\qquad ④$$

式 (5-4-1) と式④を加えて 2 で割る $(\pi<\theta<2\pi)$.

5-5 問題 **5-2** の式①の両辺に θ をかけると,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\theta\sin n\theta}{n}=\frac{1}{2}\theta^2\qquad(-\pi<\theta<\pi)$$

左辺の級数は，定理 5-4 により一様収束する（$1/n$ とその他の部分の積とみる）ので，項別積分が可能である.

$$\frac{(-1)^{n-1}}{n}\int_0^{\pi}\theta\sin n\theta d\theta=\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left[-\frac{\theta}{n}\cos n\theta+\frac{1}{n^2}\sin n\theta\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{n^2}$$

$$\int_0^{\pi}\frac{\theta^2}{2}d\theta=\frac{\pi^3}{6}$$

なお，$\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m)^2}=\frac{3}{4}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}=\frac{\pi^2}{8}$

5-6

(1) 問題 **5-4** の式①の左辺の級数は一様収束するので，項別積分が可能である.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\int_0^{\theta}\frac{\sin n\theta}{n}d\theta=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos n\theta}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$$

$$\int_0^{\theta}\frac{\theta}{2}d\theta=\frac{\theta^2}{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{2N}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}=\lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots-\frac{1}{(2N)^2}\right)$$

$$=\lim_{N\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2N-1)^2}\right)-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{(2N)^2}\right)\right\}$$

$$=\lim_{N\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{(2N)^2}\right)-2\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{(2N)^2}\right)\right\}$$

$$=\lim_{N\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{(2N)^2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{N^2}\right)\right\}$$

$$=\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{(2N)^2}\right)-\frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{N^2}\right)$$

$$=\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{2}\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{12}\qquad(-\pi<\theta<\pi)$$

式②により，$\theta=\pi,\ -\pi$ でも成立する．

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n+1}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos(n-1)\theta}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n-1)\theta}{n}-1$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta\cos\theta+\sin n\theta\sin\theta}{n}-1$$

$$=\cos\theta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n}+\sin\theta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}-1$$

したがって，式 (5-4-1, 2) を用いると

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n(n+1)}=1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\log\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)-\frac{\pi-\theta}{2}\sin\theta\qquad(0<\theta<2\pi)$$

(3) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n+1}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin(n-1)\theta}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n-1)\theta}{n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta\cos\theta-\cos n\theta\sin\theta}{n}$$

$$=\cos\theta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}-\sin\theta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n}$$

ゆえに，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n(n+1)}=(\pi-\theta)\sin^2\frac{\theta}{2}-\sin\theta\log\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)\qquad(0<\theta<2\pi)$$

(4) $f(x) = \exp(x\cos\theta)\cos(x\sin\theta)$

とおくと，

$f^{(n)}(x) = \exp(x\cos\theta)\cos(x\sin\theta + n\theta)$

$\exp(x\cos\theta)$, $\cos(x\sin\theta + n\theta)$ ともにテイラー展開可能（収束半径 ∞）なので，

$$f(x) = \exp(x\cos\theta)\cos(x\sin\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n!}x^n \qquad (0 \le \theta < 2\pi)$$

5-7 $\dfrac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

(1) 指数関数：$\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{1}{n+1} \to 0 \qquad R = \infty$

(2) $\dfrac{1}{1+x}$ ：$\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1 \qquad R = 1$

(3) スティルチェス級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n! x^n$ ：$\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = n+1 \to \infty \qquad R = 0$

5-8

$$\alpha(N) = \frac{S_{N-1}S_{N+1} - S_N^2}{S_{N-1} + S_{N+1} - 2S_N}$$

に

$$S_k = \frac{1-(-x)^k}{1+x}$$

を代入すると，

$$\alpha(N) = \frac{\{1-(-x)^{N-1}\}\{1-(-x)^{N+1}\} - \{1-(-x)^N\}^2}{1-(-x)^{N-1} + 1 - (-x)^{N+1} - 2\{1-(-x)^N\}}$$

$$= \frac{-(-x)^{N-1} - (-x)^{N+1} + 2(-x)^N}{1-(-x)^{N-1} + 1 - (-x)^{N+1} - 2\{1-(-x)^N\}}\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$ ：N によらぬ定数

$(= \lim_{k\to\infty} S_k,\ |x| < 1)$

を得る．

5-9 式 (5-5-4) より

$$\sum_{n=0}^{m}\frac{S_{N+n}(N+n)^m(-1)^{m+n}}{n!(m-n)!} = \frac{(-1)^m}{m!}\sum_{j=0}^{m}s_j\sum_{n=0}^{m}{}_mC_n(N+n)^{m-j}(-1)^n$$

ゆえに，

$$\frac{(-1)^m}{m!}\sum_{n=0}^{m}{}_mC_n(N+n)^{m-j}(-1)^n$$

が $j = 1, 2, 3, \cdots, m$ のとき 0 になり，$j = 0$ のとき 1 になることを示せばよい．

次の 2 項展開式

$$x^N(1+x)^m = \sum_{n=0}^{m}{}_mC_n x^{N+n}$$

の両辺を微分したのちに，両辺に x を乗じることを $m - j$ 回繰り返すと，

$$\left\{(1+x)\ \text{に関して}\ j+1\ \text{次以上の式}\right\} + x^{N+m-j}\frac{m!}{j!}(1+x)^j$$

$$= \sum_{n=0}^{m} {}_mC_n(N+n)^{m-j}x^{N+n}$$

を得る．両辺に $x=-1$ を代入すると，

$j=1,2,3,\cdots,m$ のとき，$\displaystyle\sum_{n=0}^{m} {}_mC_n(N+n)^{m-j}x^{N+n-1}=0$

$j=0$ のとき，$\displaystyle(-1)^{N+m}m! = \sum_{n=0}^{m} {}_mC_n(N+n)^{m}(-1)^{N+n}$　　すなわち，

$$\frac{(-1)^m}{m!}\sum_{n=0}^{m} {}_mC_n(N+n)^m(-1)^n = 1\ \text{を得る．}$$

■ 第 6 章（p. 151）

6-1

(1) $\displaystyle\frac{d^2}{dx^2}y+n^2y=0 \qquad (0\le x\le 2\pi) \qquad n$：自然数　①

は，斉次シュトゥルム方程式 (6-1-1) において，$R(x)$，$S(x)$ をそれぞれ

$R(x)=1$

$S(x)=S_n(x)\equiv -n^2$

とおいたものである．

区間 $0\le x\le 2\pi$ において $R(x)>0$ を満たしており，

$S_n(x)>S_m(x), \qquad n<m$

であるから，定理 6-3 の条件をすべて満たしている．

それゆえ，微分方程式①の独立な解：正弦関数・余弦関数

$Y_n(x)=\sin nx, \cos nx$

の $(0<x<2\pi)$ における零点の個数は，それぞれ $2n-1$，$2n$ であり，$S(x)$ が小さいほど，すなわち n が大きいほど，零点がふえる．すなわち，より速く振動する．

(2) 式①は，斉次境界条件 (6-1-13, 14) を有する，斉次シュトゥルム方程式 (6-1-1′) において，

$R(x,\lambda)=1$

$S(x,\lambda)=-\lambda=-n^2$

とおいたものである．ここで，斉次境界条件

$y(0)=y(2\pi)=0$

を満たす解を求めると，これは境界条件 (6-1-13, 14) において，

$\alpha_a = \alpha_b = 0$

とおいたものである．そして，この問題は条件

i) $R(x,\lambda)$ および $S(x,\lambda)$ はパラメータ λ の単調減少(非増加)関数($\lambda_{\min} = -\infty < \lambda < \lambda_{\max} = \infty$)であり，区間 $0 \leq x \leq 2\pi$ 内の 0 でない長さをもついかなる部分区間においても $S(x,\lambda) \equiv 0$ とはならない

ii) $R(x,\lambda), S(x,\lambda)$ それぞれの上限 $R_{\max}(\lambda) = 1, S_{\max}(\lambda) = -\lambda$ および下限 $R_{\min}(\lambda) = 1, S_{\min}(\lambda) = -\lambda$ は，λ の連続な単調減少関数($\lambda_{\min} = -\infty < \lambda < \lambda_{\max} = \infty$)である．

iii) $-S_{\max}(\lambda)/R_{\max}(\lambda) \to +\infty, \lambda \to \lambda_{\max}$ (6-1-15)

iv) 係数 α_a, β_a および α_b, β_b が λ の関数である場合には

$$\frac{R(a,\lambda)\beta_a(\lambda)}{\alpha_a(\lambda)} \text{ および } \frac{R(b,\lambda)\beta_b(\lambda)}{\alpha_b(\lambda)}$$

は λ の単調減少関数である．

v) $-S_{\min}(\lambda)/R_{\min}(\lambda) \to -\infty, \lambda \to \lambda_{\min}$

をすべて満たすので，定理 6-7 が成立する．

すなわち，本問題には，無限個の実数固有値 $\lambda = n^2$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ が存在し，それらを小さい順に

$$\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \cdots,\ \lambda_m,\ \cdots$$

とならべ，それぞれの固有値に対応する解(固有関数)を

$$Y_0,\ Y_1,\ Y_2,\ Y_3,\ \cdots,\ Y_m,\ \cdots$$

とかくと，解 Y_m は区間 $0 < x < 2\pi$ 内に m 個の零点を有する．

$$Y_{2k-1}(x) = \sin kx$$

$$Y_{2k}(x) = \cos kx$$

6-2 $f(x)$ が奇関数：$f(-x) = -f(x)$ のとき，

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)dx = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{0} f(x)dx + \frac{1}{T}\int_{0}^{T/2} f(x)dx$$

$$= -\frac{1}{T}\int_{T/2}^{0} f(-t)dt + \frac{1}{T}\int_{0}^{T/2} f(x)dx = -\frac{1}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)dt + \frac{1}{T}\int_{0}^{T/2} f(x)dx = 0$$

$$a_n = (-1)^n\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right)dx = 0 \text{ ：同様} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

$f(x)$ が偶関数：$f(-x) = f(x)$ のとき，

$$b_n = (-1)^n\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{0} f(x)\sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right)dx + (-1)^n\frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} f(x)\sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right)dx$$

$$= -(-1)^n\frac{2}{T}\int_{T/2}^{0} f(-t)\sin\left(-\frac{2n\pi}{T}t\right)dt + (-1)^n\frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} f(x)\sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right)dx$$

$$= -(-1)^n\frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)dt + (-1)^n\frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} f(x)\sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right)dx = 0$$

$(n = 1, 2, 3, \cdots)$

6-3 (1) $\theta = 2\sin\theta - \sin 2\theta + \dfrac{2}{3}\sin 3\theta - \dfrac{2}{4}\sin 4\theta + \cdots \qquad (-\pi < \theta < \pi)$

(2) $\log\left(2\cos\dfrac{1}{2}\theta\right) = \cos\theta - \dfrac{1}{2}\cos 2\theta + \dfrac{1}{3}\cos 3\theta - \cdots \qquad (-\pi < \theta < \pi)$

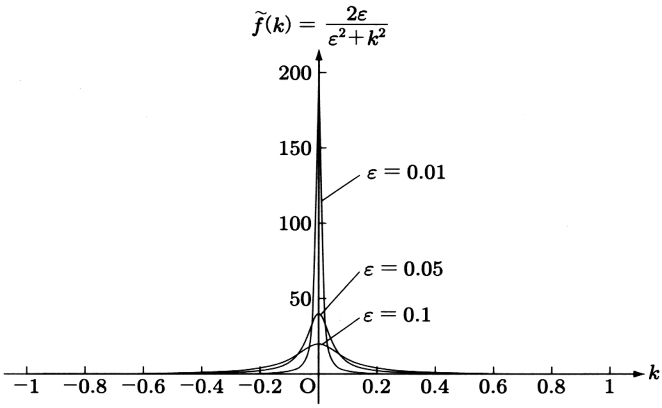
(3) $\theta^2 = \dfrac{\pi^2}{3} - 4\cos\theta + \dfrac{4}{2^2}\cos 2\theta - \dfrac{4}{3^2}\cos 3\theta + \dfrac{4}{4^2}\cos 4\theta - \cdots \qquad (-\pi \leq \theta \leq \pi)$

6-4

$$y = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots\right) \qquad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

6-5

(1)
$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx = \int_{-\infty}^{0} \exp\{(\varepsilon - ik)x\}\,dx + \int_{0}^{\infty} \exp\{(-\varepsilon - ik)x\}\,dx$$
$$= \left[\frac{\exp\{(\varepsilon - ik)x\}}{\varepsilon - ik}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{\exp\{(-\varepsilon - ik)x\}}{-\varepsilon - ik}\right]_{0}^{\infty}$$
$$= \frac{1}{\varepsilon - ik} + \frac{1}{\varepsilon + ik} = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2 + k^2} \qquad (\varepsilon > 0)$$



(2) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0+} \tilde{f}(k) = 0 \qquad (k \neq 0)$

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k)dk = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2 + k^2}dk = \frac{2}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0+}\left[2\varepsilon\frac{\tan^{-1}(k/\varepsilon)}{\varepsilon}\right]_0^{\infty} = 1$$

6-6 変数分離形の解

$$f = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$$

を式①に代入すると，

$$\left[\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr}\right]\Theta\Phi + \frac{R}{r^2}\left[\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}\Phi + \cot\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\Phi + \frac{\Theta}{\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}\right] = 0$$

となり，両辺を $\dfrac{R\Theta\Phi}{r^2}$ で割ると，

$$\frac{r^2}{R}\left[\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}\right]=-\left[\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}+\frac{\cot\theta}{\Theta}\frac{d\Theta}{d\theta}+\frac{1}{\Phi\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}\right]$$

を得る．上式の左辺は r のみの関数，右辺は θ と ϕ のみの関数であるから，これは定数である．

$$\frac{r^2}{R}\left[\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}\right]=-\left[\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}+\frac{\cot\theta}{\Theta}\frac{d\Theta}{d\theta}+\frac{1}{\Phi\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}\right]=k$$

さらに右の等式の両辺を変形すると，

$$\frac{\sin^2\theta}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}+\frac{\sin\theta\cos\theta}{\Theta}\frac{d\Theta}{d\theta}+k\sin^2\theta=-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}$$

を得る．上式の左辺は θ のみの関数，右辺は ϕ のみの関数であるから，再びこれは定数である．しかも，Φ は 2π の周期をもつ周期関数でなければならないので，この定数は n^2（n：自然数）である．したがって，

$$\Phi=\sin n\phi,\ \cos n\phi$$

であり，Θ の支配方程式は

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\left(-\frac{n^2}{\sin^2\theta}+k\right)\Theta=0$$

となる．ここで変数変換

$$x=\cos\theta \qquad (dx=-\sin\theta d\theta)$$

を行うと，

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{d\Theta}{dx}\right\}+\left(k-\frac{n^2}{1-x^2}\right)\Theta=0$$

を得る．その解 Θ が $x=\pm1$ で有界であるためには，

$$k=m(m+1)$$

でなければならない(6-1-7 項参照)．このとき，解はルジャンドル随伴関数

$$\Theta=P_m^n(x)=(1-x^2)^{n/2}\frac{d^nP_m}{dx^n}$$

であり，

$$P_m^n(x)\begin{cases}\sin n\phi\\ \cos n\phi\end{cases}$$

が解の直交基底を形成する．通常複素形式で規格化したもの

$$Y_m^n(\theta,\phi)\equiv(-1)^{(n+|n|)/2}\sqrt{\frac{(2m+1)(m-|n|)!}{4\pi(m+|n|)!}}P_m^{|n|}(\cos\theta)e^{in\phi}$$

を用い，これを**球面調和関数**と呼ぶ．

なお，このとき動径関数 R の解は

$$R(r)=r^{m+1},\ r^{-m}$$

である．ゆえに，ラプラス方程式の一般解は

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(a_m r^{m+1}+\frac{b_m}{r^m}\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n Y_m^n(\theta,\phi)$$

である.

6-7 設問の微分方程式③の一般解は，③の斉次方程式

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{C}Q=0$$

の一般解

$$Q_h = A\exp\left\{\left(-\frac{R}{2L}+i\frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1-\frac{CR^2}{4L}}\right)t\right\}$$
$$+B\exp\left\{\left(-\frac{R}{2L}-i\frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1-\frac{CR^2}{4L}}\right)t\right\}$$

に，非斉次方程式③の特解

$$Q_i = \frac{V_1}{\omega_1\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{C\omega_1}-L\omega_1\right)^2}}\sin(\omega_1 t+\theta_1)+\frac{V_{21}}{\omega_2\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{C\omega_2}-L\omega_2\right)^2}}\sin(\omega_2 t+\theta_2)$$

$$\cos\theta_1 = \frac{\frac{1}{C\omega_1}-L\omega_1}{\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{C\omega_1}-L\omega_1\right)^2}},\qquad \sin\theta_1=\frac{-R}{\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{C\omega_1}-L\omega_1\right)^2}}$$

$$\cos\theta_2 = \frac{\frac{1}{C\omega_2}-L\omega_2}{\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{C\omega_2}-L\omega_2\right)^2}},\qquad \sin\theta_2=\frac{-R}{\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{C\omega_2}-L\omega_2\right)^2}}$$

を加えたものである.

それゆえ，回路の固有周波数 $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ がテレビ 1 の電波の周波数 ω_1 と一致しているならば，テレビの LCR 回路を流れる電流 $I = dQ/dt$ の各項のうち，周波数 ω_1 成分の振幅

$$\frac{\omega_1 V_1}{\omega_1\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{C\omega_1}-L\omega_1\right)^2}}=\frac{V_1}{R}\qquad (R\to 0+)$$

が，周波数 ω_2 成分の振幅に比べて非常に大きくなり，実質的にテレビ 1 の電波からの信号のみを受信する.

■ 第 7 章（p. 193）

7-1

$$I(x)\equiv\int_0^{\infty}\frac{e^{-t}}{1+xt}dt=\left[\frac{-e^{-t}}{1+xt}\right]_0^{\infty}+\int_0^{\infty}\frac{-xe^{-t}}{(1+xt)^2}dt=1-x\int_0^{\infty}\frac{e^{-t}}{(1+xt)^2}dt$$

$$= 1 - x\left[\frac{-e^{-t}}{(1+xt)^2}\right]_0^\infty - x\int_0^\infty \frac{-2xe^{-t}}{(1+xt)^3}dt = 1 - x + 2x^2\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{(1+xt)^3}dt = \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{N}(-1)^n n! x^n + R_N(x)$$

$$R_N(x) = (-1)^{N+1}(N+1)!x^{N+1}\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{(1+xt)^{N+2}}dt$$

7-2

$$\frac{1}{2}\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t^3}}dt = \frac{1}{2}\left[\frac{-e^{-t}}{\sqrt{t^3}}\right]_x^\infty - \frac{3}{2^2}\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t^5}}dt = \frac{1}{2}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x^3}} - \frac{3}{2^2}\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t^5}}dt$$

$$= \frac{1}{2}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x^3}} - \frac{3}{2^2}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x^5}} + \frac{3\cdot 5}{2^3}\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t^7}}dt = \cdots$$

$$= -\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2x)^k} - (-1)^{n+1}\frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}}\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t^{2n+3}}}dt$$

また，

$$\left|\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t^{2n+3}}}dt\right| < \frac{1}{\sqrt{x^{2n+3}}}\int_x^\infty e^{-t}dt = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x^{2n+3}}} \ll \frac{e^{-x}}{\sqrt{x^{2n+1}}} \qquad x \to \infty$$

ゆえに，

$$\frac{1}{2}\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t^3}}dt \sim \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2x)^k} \qquad x \to +\infty$$

7-3

(1) $$\int_x^\infty e^{-t}t^{-p}dt \sim e^{-x}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k p(p+1)\cdots(p+k-1)x^{-p-k} \qquad x \to +\infty$$

(2) $$\int_a^x e^t t^{-p}dt \sim e^x\sum_{k=0}^{\infty}p(p+1)\cdots(p+k-1)x^{-p-k} \qquad x \to +\infty$$

7-4

$$I(x) \sim \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f(c)\exp x\left(\varphi(c) + \frac{\varphi^{(2m)}(c)(t-c)^{2m}}{(2m)!}\right)dt \qquad x \to +\infty$$

$$= f(c)\exp(x\varphi(c))\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon}\exp\frac{x(t-c)^{2m}\varphi^{(2m)}(c)}{(2m)!}dt$$

となるが，この場合も精度を失うことなく積分の範囲を上下に $\pm\infty$ まで広げることができ，

$$I(x) \sim f(c)\exp(x\varphi(c))\int_{-\infty}^{\infty}\exp\frac{x(t-c)^{2m}\varphi^{(2m)}(c)}{(2m)!}dt \qquad x \to +\infty$$

となる．ここで，

$$u = \sqrt[2m]{\frac{-x\varphi^{(2m)}(c)}{(2m)!}}(t-c)$$

とおくと，

$$I(x) \sim \sqrt[2m]{\frac{(2m)!}{-x\varphi^{(2m)}(c)}}f(c)\exp(x\varphi(c))\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-u^{2m})du \qquad x \to +\infty$$

を得る．この定積分はガンマ関数

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

を用いて

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-u^{2m}) du = \frac{2\Gamma(1/2m)}{(2m)}$$

と表すことができるので，最終的に

$$I(x) \sim \frac{2\Gamma(1/(2m))}{2m} \sqrt[2m]{\frac{(2m)!}{-x\varphi^{(2m)}(c)}} f(c) \exp(x\varphi(c)) \qquad x \to +\infty \qquad ①$$

を得る．最大値をとる点 c が，積分の上下限の a または b に一致するときは，式①の右辺に 1/2 を乗じる．式①は式 (7-4-7) を一般化したものである．

7-5

(1) $$I(x) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t \exp(-x \sin^4 t) dt$$

$$\sim \frac{2\Gamma(1/4)}{4} \sqrt[4]{\frac{4!}{-x\varphi^{(4)}(0)}} \cos 0 \exp(x \cdot 0) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{2\sqrt[4]{x}} \qquad x \to +\infty$$

(2) $$\int_0^{\pi/4} \cos t e^{-xt^2} dt \sim \int_0^{\varepsilon} 1 \cdot e^{-xt^2} dt \sim \int_0^{\infty} e^{-xt^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}} \qquad x \to +\infty$$

7-6 $y(x) = \dfrac{1}{x}\exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$ を式 (7-2-7) の左辺に代入すると，

$$x^2\left(\frac{2}{x^3} + \frac{4}{x^4} + \frac{1}{x^5}\right)\exp\left(\frac{1}{x}\right) + (3x+1)\left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)\exp\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}\exp\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

7-7

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} = \int_1^n \sqrt{x} dx + \frac{1}{2}(\sqrt{n} + 1) - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{B_{2j}(4j-5)!!}{(2j)!2^{2j-1}}\left(\frac{1}{n^{2j-3/2}} - 1\right) + \int_1^n \frac{(4m-3)!!P_{2m}(x)}{(2m)!2^{4m-1}x^{2m-1/2}} dx$$

$$= \frac{2}{3}(n^{3/2} - 1) + \frac{1}{2}(\sqrt{n} + 1) - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{B_{2j}(4j-5)!}{(2j)!(2j-2)!2^{2j-1}2^{2j-2}}\left(\frac{1}{n^{2j-1/2}} - 1\right)$$

$$+ \int_1^n \frac{(4m-3)!P_{2m}(x)}{(2m)!(2m-1)!2^{4m-1}2^{2m-1}x^{2m-1/2}} dx$$

$$= \frac{2}{3}n^{3/2} + \frac{1}{2}\sqrt{n} - \frac{1}{6} + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{B_{2j}(4j-5)!}{2^{4j-3}(2j)!(2j-2)!} + \int_1^{\infty} \frac{(4m-3)!P_{2m}(x)}{(2m)!(2m-1)!2^{6m-3}x^{2m-1/2}} dx$$

$$- \sum_{j=1}^{m-1} \frac{B_{2j}(4j-5)!}{(2j)!(2j-2)!2^{4j-3}} \frac{1}{n^{2j-1/2}} - \int_n^{\infty} \frac{(4m-3)!P_{2m}(x)}{(2m)!(2m-1)!2^{6m-3}x^{2m-1/2}} dx \qquad ①$$

式①では，すべての m について，残差 R は展開の最終項(第 $m-1$ 項)よりも小さい．

$$R = -\int_n^{\infty} \frac{(4m-3)!P_{2m}(x)}{(2m)!(2m-1)!2^{6m-3}x^{2m-1/2}} dx = -\frac{(4m-3)!P_{2m}(\xi)}{(2m)!(2m-1)!2^{6m-3}} \int_n^{\infty} \frac{1}{x^{2m-1/2}} dx$$

$$= -\frac{(4m-3)!P_{2m}(\xi)}{(2m)!(2m-1)!2^{6m-3}} \frac{2m-3/2}{n^{2m-3/2}}$$

$$\ll -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{B_{2(m-1)}(4(m-1)-5)!}{(2m-2)!(2(m-1)-2)!2^{4(m-1)-3}} \frac{1}{n^{2(m-1)-1/2}} \qquad (n < \xi < \infty) \qquad (n \to \infty)$$

ゆえに，漸近級数展開

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \sim \frac{2}{3} n^{3/2} + \frac{1}{2}\sqrt{n} + C - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_{2j}(4j-5)!}{(2j)!(2j-2)!2^{4j-3}} \frac{1}{n^{2j-1/2}} \qquad n \to \infty$$

を得る．ここに，定数項 C は，

$$C = -\frac{1}{6} + \lim_{m\to\infty} \left\{ \sum_{j=1}^{m-1} \frac{B_{2j}(4j-5)!}{2^{4j-3}(2j)!(2j-2)!} + \int_1^{\infty} \frac{(4m-3)!P_{2m}(x)}{(2m)!(2m-1)!2^{6m-3}x^{2m-1/2}} dx \right\}$$

である．

7-8 解を

$$y = \exp(Q(x))$$

とおき，微分方程式に代入すると，

$$\left\{ \frac{d^2Q}{dx^2} + \left(\frac{dQ}{dx}\right)^2 + 2x\frac{dQ}{dx} \right\} \exp(Q) = 0$$

となり，共通因子 $\exp(Q)$ で除すと，$Q(x)$ に関する 2 階の微分方程式

$$\frac{d^2Q}{dx^2} + \left(\frac{dQ}{dx}\right)^2 + 2x\frac{dQ}{dx} = 0 \qquad ①$$

を得る．ここで，漸近関係 (7-6-9) を仮定すると，

$$\left(\frac{dQ}{dx}\right)^2 \sim -2x\frac{dQ}{dx} \qquad x \to +\infty$$

を得，これからただちに

$$Q \sim C, \qquad Q \sim -x^2 \qquad x \to +\infty$$

を得る．このうち，後者が相補誤差関数の $x \to +\infty$ での条件 $Erfc(x) \to 0+$ を満たす解である．$Q(x)$ は仮定 (7-6-9) を満たしている．解の主要部を得るために

$$Q(x) = -x^2 + R(x) \qquad -x^2 \gg R(x) \qquad x \to +\infty \qquad ②$$

とおき，式①に代入すると，

$$-2 + \frac{d^2R}{dx^2} + \left(-2x + \frac{dR}{dx}\right)^2 + 2x\left(-2x + \frac{dR}{dx}\right) = 0$$

すなわち

$$-2 + \frac{d^2R}{dx^2} + \left(\frac{dR}{dx}\right)^2 - 2x\frac{dR}{dx} = 0 \qquad ③$$

を得る．ここでも，漸近関係②の両辺を微分することが許される．

$$-2x \gg R'(x) \qquad -2 \gg R''(x) \qquad x \to +\infty \qquad ④$$

と仮定し，$R(x)$ の解を得た後にこれを吟味する．この仮定の下に，式③は漸近関係

$$-2x\frac{dR}{dx} \sim 2 \qquad x \to +\infty$$

となり，これから

$$R \sim -\log x \qquad x \to +\infty$$

を得る．ここでも，$R(x)$ は仮定④を満たしていることを確認できる．こうして，解の $x \to +\infty$ における主要部

$$y(x) \sim \exp(-x^2 - \log x) = \frac{1}{x}\exp(-x^2) \qquad x \to +\infty$$

を得る．

さらに精度を上げるために

$$y(x) = \frac{1}{x}\exp(-x^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{x^n} \qquad x \to +\infty$$

とおき，もとの微分方程式に代入し相殺する項を整理すると，

$$\exp(-x^2)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2na_n}{x^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)a_n}{x^{n+3}}\right) = 0$$

を得る．これから漸化式

$$2(n+2)a_{n+2} = -(n+1)(n+2)a_n \qquad n = 1, 2, \cdots$$

を得る．任意定数 a_0 を $1/\sqrt{\pi}$ と選ぶことにより，一般に用いられている相補誤差関数の漸近級数展開

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}x}\exp(-x^2)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m)!}{m!(2x)^{2m}} \qquad x \to +\infty$$

を得る．

参考文献

数列基礎

［1］ 高木貞治「解析概論」岩波書店, 1961.

［2］ 三村征雄編「大学演習微分積分学」裳華房, 1955.

［3］ 森口・宇田川・一松「数学公式II：級数・フーリエ解析」岩波書店, 1957.

フーリエ級数 [3] および

［4］ E. クライツィグ著，阿部訳「技術者のための高等数学 3　フーリエ解析と偏微分方程式」培風館, 1987.

［5］ E. L. Ince, *Ordinary differential equations*, Dover Publications, NY, 1956.

［6］ H. S. Carslaw, *Introduction to the theory of Fourier series and integrals*, Dover Publications, NY, 1930.

［7］ W. Rogosinski, *Fourier series*, Chelsea Publishing Co., NY, 1951.

［8］ J. N. Sneddon, *Fourier transforms*, McGraw-Hill, NY, 1951.

［9］ R. V. Churchill, *Fourier series and boundary value problems*, McGraw-Hill, NY, 1941.

漸近級数・漸近解析

［10］ A. Erdelyi, *Asymptotic expansions*, Dover Publications, NY, 1956.

［11］ Carl M.Bender, Steven A.Orszag, *Advanced mathematical methods for scientists and engineers*, McGraw-Hill, 1978.

［12］ 柴田正和「漸近級数と特異摂動法」森北出版, 2009.

［13］ 柴田正和「常微分方程式の局所漸近解析」森北出版, 2010.

常微分方程式 [5], [12], [13]

関数表

［14］ Milton Abramowitz, Irene A. Stegun (Ed.), *Handbook of mathematical functions, Dover Publications*, NY, 1965.

［15］ 森口・宇田川・一松「数学公式III：特殊函数」岩波書店, 1960.

［16］ G.N. Watson, *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge University Press,1966.

あとがき

中高生から大学(院)生，あるいは社会人に数学・物理学その他の講義をしていると，それぞれのテーマに他のいろいろな分野の知識や方法が深くかつ複雑に関係していることに気づかされる．その一例が数列・級数である．数列は高校時代からおなじみのテーマであるが，後に関数列に成長することにより，微分方程式を解く有力な手段(級数解)となり，実用上重要なフーリエ級数を生み，さらに漸近解析の基礎である漸近級数へと応用分野を広げてゆく．

本書は，理工学ないし経済・統計学の学生・研究者・技術者を読者層と想定し，大学前期課程の微積分学および微分方程式論の諸成果を反映させつつ，数列・関数列とその無限級数論を展開したものである．特に，紙数の 2/3 が関数列に費やされており，その中でもフーリエ級数と漸近級数にそれぞれ紙数の 1/4 が割り当てられていることでも明らかなように，本書の主題はフーリエ級数と漸近級数である．

第 6 章 フーリエ級数においては，一般のテキストの記述と比べて，固有関数系による級数展開にいたる基礎論を詳述する一方，具体的な応用例にもやや詳しくふれた．第 7 章 漸近級数では，複素関数論を使わない程度に抑えて，漸近級数の基礎理論と応用例をいくつか説明した．その結果，全体として大学前期学生が無理なく読むことのできるテキストに仕上げられたつもりである．

本書を上梓するにあたり，執筆・図および演習問題解答の作成にいたるまで余人の手を借りることがまったく無かったので，もし誤謬があればすべて著者の責任である．なお，編集を担当された森北出版の上村紗帆氏は，校正作業において誤植を発見し原稿の体裁を整えることはもちろん，読者の目線で著述の改良を多数提案してくださった．そのお仕事ぶりは著者の期待を大きく上回るものであったことを特記して謝意を表します．

著　者

索　　引

著　者　略　歴

柴田　正和（しばた・まさかず）

1949 年　横浜市に生まれる
1967 年　私立麻布高校卒業
1971 年　東京大学理学部物理学科卒業
1987 年　マサチューセッツ工科大学　Ph.D.（流体力学）
1989 年　（有）応用数理解析 代表取締役
2003 年　戸塚理数塾 設立
　　　　現在に至る

【著書】

「漸近級数と特異摂動法」森北出版，2009.
「常微分方程式の局所漸近解析」森北出版，2010.
「自然のふしぎを解き明かそう」応用数理解析，2011.

編集担当　上村紗帆（森北出版）
編集責任　水垣偉三夫（森北出版）
組　　版　アベリー
印　　刷　エーヴィスシステムズ
製　　本　協栄製本

数列・関数列の無限級数

2012 年 1 月 27 日　第 1 版第 1 刷発行

著　　者　柴田正和
発 行 者　森北博巳
発 行 所　**森北出版株式会社**
東京都千代田区富士見 1-4-11（〒 102-0071）
電話 03-3265-8341 ／ FAX 03-3264-8709
http://www.morikita.co.jp/
日本書籍出版協会・自然科学書協会・工学書協会　会員
JCOPY ＜（社）出版者著作権管理機構 委託出版物＞

落丁・乱丁本はお取替えいたします.

Printed in Japan ／ ISBN978-4-627-07701-0